

Алгебраическая геометрия 10: Лемма Накаямы и целые морфизмы

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем. Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя. Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже. Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

10.1. Лемма Накаямы

Задача 10.1. Пусть A – нетерово кольцо, а M – конечно-порожденный A -модуль. Докажите, что $\text{End}_A(M)$ – конечно-порожденный A -модуль.

Задача 10.2. Пусть A нетерово кольцо, M – конечно-порожденный A -модуль, а $\Phi \in \text{End}_A(M)$. Обозначим за $A[\Phi]$ подалгебру в $\text{End}_A(M)$, порожденную Φ . Докажите, что Φ является корнем полинома $P(t) = 0$, который **унитарен** (с коэффициентами в A и старшим коэффициентом 1).

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.1. Пусть Φ – эндоморфизм конечно-порожденного A -модуля, e_i – образующие M , а $\Phi(e_i) = \sum a_{ij}e_j$. **Характеристический полином** $\text{Chpoly}_\Phi(t) \in A[t]$ есть определитель матрицы $\det(t \text{Id} - A)$, где $A = (a_{ij})$.

Задача 10.3 (!). Приведите пример конечно порожденного A -модуля и эндоморфизма Φ , такого что $\text{Chpoly}_\Phi(t)$ не единственный.

Задача 10.4 (!). Докажите, что $\text{Chpoly}_\Phi(A) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь тем, любой конечно-порожденный модуль является фактором свободного, и примените теорему Гамильтона-Кэли.

Задача 10.5. Пусть M – конечно-порожденный A -модуль, $\Phi \in \text{End}_A(M)$, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $\Phi(M) \subset IM$. Докажите, что для какого-то характеристического полинома $\text{Chpoly}_\Phi(t)$, все коэффициенты $\text{Chpoly}_\Phi(t)$, кроме старшего, лежат в I .

Задача 10.6. Пусть $P(t)$ – характеристический полином для тождественного эндоморфизма $\text{Id} \in \text{End}_A(M)$, а $S \in A$ есть сумма всех коэффициентов P . Докажите, что $SM = 0$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гамильтона-Кэли.

Задача 10.7 (!). (Лемма Накаямы)

Пусть M – конечно-порожденный A -модуль, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $IM = M$. Докажите, что для какого-то $a \in I$, имеем $(1 - a)M = 0$.

Указание. Выведите из задачи 10.5, что существует характеристический полином $\text{Chr}_{\text{poly}_{\text{id}}}(t)$, все коэффициенты которого, кроме старшего, лежат в I , и примените предыдущую задачу.

Задача 10.8 (*). (теорема Крулля) Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в нетеровом кольце. Докажите, что $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

Задача 10.9 (!). Пусть A – кольцо без делителей нуля, а $k(A)$ – его поле частных. Рассмотрим функтор на A -модулях, $M \mapsto M \otimes_A k(A)$. Докажите, что этот функтор точен.

Определение 10.2. Кручение в A -модуле есть ядро естественного отображения $M \rightarrow M \otimes_A k(A)$. Модуль M **без кручения**, если M вкладывается в $k(M)$.

Задача 10.10. Обозначим за $T(M)$ кручение M , то есть ядро $M \rightarrow M \otimes_A k(M)$. Докажите, что функтор кручения $M \mapsto T(M)$ переводит точную последовательность $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$ в точную

$$0 \rightarrow T(M_1) \rightarrow T(M_2) \rightarrow T(M_3).$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что кручение $M/T(M)$ равно нулю.

Задача 10.11 (!). (Лемма Накаямы для модулей без кручения) Пусть A – кольцо без делителей нуля, M – конечно-порожденный A -модуль без кручения, а $I \subsetneq A$ – идеал в A , который удовлетворяет $IM = M$. Докажите, что $M = 0$.

Определение 10.3. Кольцо A называется **локальным**, если в A есть только один максимальный идеал.

Задача 10.12 (*). (лемма Накаямы для локальных колец)

Пусть M – конечно-порожденный модуль над нетеровым локальным кольцом A , \mathfrak{m} его максимальный идеал, а $M' \subset M$ его подмодуль, такой, что $M/\mathfrak{m}M = M'/\mathfrak{m}M'$. Докажите, что $M = M'$.

Задача 10.13 (*). Пусть M – конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом, а $\phi: M \rightarrow M$ эпиморфизм. Докажите, что ϕ – изоморфизм.

10.2. Целые морфизмы

Определение 10.4. Морфизм аффинных многообразий $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение, **конечным**, если \mathcal{O}_X – конечно-порожденный \mathcal{O}_Y -модуль, и **целым**, если он доминантный и конечный.

Задача 10.14. Пусть $A \subset \mathbb{C}[x, y]$ – подкольцо, порожденное x^{100}, y^{666} и $xy(x^2 - 1)$. Докажите, что морфизм $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \rightarrow \text{Spec}(A)$ целый.

Задача 10.15. Пусть $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ морфизм, заданный формулой $\phi(x) = x^{666}y^{18}$, $\phi(y) = x^{37}y$. Будет ли этот морфизм целым?

Задача 10.16 (!). Пусть $A \subset B$ подкольцо, причем B конечно порождено как A -модуль и без делителей нуля. Докажите, что для любого максимального идеала $I \subset A$, кольцо $B/IB = B \otimes_A (A/IA)$ конечномерно как векторное пространство над A/IA и нетривиально.

Указание. Воспользуйтесь леммой Накаямы.

Задача 10.17 (!). Докажите, что целый морфизм всегда сюръективен, причем прообраз любой точки конечен.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.18 (*). Пусть $X \rightarrow Y$ – целый морфизм, а $I \subset \mathcal{O}_X$ – ненулевой простой идеал. Докажите, что $I \cap \mathcal{O}_Y$ – тоже ненулевой идеал.

10.3. Целое замыкание

Определение 10.5. Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B , целых над A , называется **целым замыканием A в B** . Множество всех элементов поля частных A , целых над A , называется **целым замыканием A** . Кольцо $A \subset B$ называется **целозамкнутым в B** , если оно совпадает со своим целым замыканием в B , и **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $k(A)$.

Задача 10.19 (!). Пусть $A \subset B$ – кольца без делителей нуля, причем B конечно порождено как A -модуль. Рассмотрим их поля частных, $k(A) \subset k(B)$. Докажите, что $k(B)$ конечномерно над $k(A)$.

Определение 10.6. Пусть R – конечномерное кольцо над полем k . Рассмотрим билинейную форму $a, b \rightarrow \text{Tr}(ab)$, где $\text{Tr}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \text{End}_k R$, $x \mapsto abx$. Такая форма называется **следом**.

Задача 10.20. Пусть K – конечное расширение поля k характеристики 0. Докажите, что форма Tr невырождена на K .

Задача 10.21 (*). Приведите пример конечного расширения полей в характеристике p , для которого форма следа $a, b \rightarrow \text{Tr}(ab)$ вырождена.

Задача 10.22 (!). Пусть $A \subset B$ кольца без делителей нуля, причем A целозамкнуто в своем поле частных, а B конечно порождено как A -модуль. Воспользовавшись вложением $k(A) \subset k(B)$, рассмотрим след $\text{Tr}(b)$ для $b \in B \subset k(B)$. Докажите, что $\text{Tr}(b) \in A$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что b целый над A , а $\text{Tr}(b)$ – след матрицы L_b , и докажите, что $\text{Tr}(b)$ целый над A .

Задача 10.23. Пусть A – кольцо без делителей нуля, M – конечно-порожденный A -модуль без кручения, а $V := M \otimes_A k(A)$ соответствующее векторное пространство. Рассмотрим невырожденную билинейную форму $g : V \times V \rightarrow k(A)$, и предположим, что $g(m, m') \in A$ для каждых $m, m' \in M$. Докажите, что $M^* := \{x \in V \mid \forall m \in M, g(x, m) \in A\}$ содержит M .

Задача 10.24 (*). В условиях предыдущей задачи, всегда ли верно, что $M^* \cong \text{Hom}_A(M, A)$?

Задача 10.25. Пусть $A \subset B$ кольца без делителей нуля, причем B конечно порождено как A -модуль. Докажите, что можно выбрать базис e_1, \dots, e_n в $k(B)$ над $k(A)$, такой, что все e_i лежат в $B \subset k(B)$.

Замечание. Отныне и до конца листка, мы будем предполагать, что все кольца и модули определены над полем характеристики 0.

Задача 10.26. В условиях предыдущей задачи, рассмотрим подмодуль $M_1 \subset B$, порожденный e_1, \dots, e_n . Докажите, что $M_1^* \supset B$, где M_1^* взят относительно билинейной формы Tr , построенной выше.

Указание. Воспользуйтесь задачей 10.23 и невырожденностью Tr .

Задача 10.27. Пусть $[K : k]$ конечное расширение полей, $A \subset k$ подкольцо, а $M_1 \subset K$ – A -подмодуль K , порожденный базисом e_1, \dots, e_n в $[K : k]$. Докажите, что он свободный.¹ Рассмотрим модуль $M_1^* := \{x \in V \mid \forall m \in M, \text{Tr}(x, m) \in A\}$. Докажите, что M_1^* тоже свободный.

Задача 10.28 (!). Пусть A – нетерово кольцо характеристики 0 без делителей нуля, $[K : k(A)]$ конечное расширение его поля частных, а B – целое замыкание A в K . Докажите, что B конечно порождено как A -модуль.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, чтобы реализовать B как подмодуль свободного модуля M_1^* .

Определение 10.7. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над \mathbb{C} , без делителей нуля, а B его целое замыкание в $k(A)$. **Морфизм нормализации** есть морфизм $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, а $\text{Spec } B$ называется **нормализацией** $\text{Spec } A$.

Задача 10.29. Найдите неприводимое аффинное многообразие, которое не нормально, и определите его нормализацию.

Задача 10.30. Докажите, что морфизм нормализации – целый.

Задача 10.31 (!). Пусть $X' \xrightarrow{\phi} X$ – конечный бирациональный морфизм, а X нормально. Докажите, что ϕ – изоморфизм.

Указание. Убедитесь, что $\mathcal{O}_{X'} \supset \mathcal{O}_X$ содержится в целом замыкании \mathcal{O}_X .

Задача 10.32 ().** Пусть X – аффинное многообразие. Назовем рациональную функцию **локально ограниченной**, если она ограничена в окрестности каждой точки X . Докажите, что X нормально тогда и только тогда, когда любая локально ограниченная рациональная функция на X регулярна.

Задача 10.33 (*). Докажите, что $\mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$ целозамкнуто.

¹Свободным A -модулем называется модуль, изоморфный A^n .