Алгебраическая геометрия 10: Лемма Накаямы и целые морфизмы

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем. Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя. Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже. Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

10.1. Лемма Накаямы

Задача 10.1. Пусть A – нетерово кольцо, а M – конечно-порожденный A-модуль. Докажите, что $\operatorname{End}_A(M)$ – конечно-порожденный A-модуль.

Задача 10.2. Пусть A нетерово кольцо, M – конечно-порожденный A-модуль, а $\Phi \in \operatorname{End}_A(M)$. Обозначим за $A[\Phi]$ подалгебру в $\operatorname{End}_A(M)$, порожденную Φ. Докажите, что Φ является корнем полинома $P(t) = 0$, который **унитарен** (с коэффициентами в A и старшим коэффициентом 1).

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.1. Пусть Φ – эндоморфизм конечно-порожденного A-модуля, e_i – образующие M, а $\Phi(e_i) = \sum a_{ij} e_j$. **Характеристический полином** $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t) \in A[t]$ есть определитель матрицы $\det(t\,\mathsf{Id} - A)$, где $A = (a_{ij})$.

Задача 10.3 (!). Приведите пример конечно порожденного A-модуля и эндоморфизма Φ, такого что $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$ не единственный.

Задача 10.4 (!). Докажите, что $\mathsf{Chpoly}_\Phi(A) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь тем, любой конечно-порожденный модуль является фактором свободного, и примените теорему Гамильтона-Кэли.

Задача 10.5. Пусть M – конечно-порожденный A-модуль, $\Phi \in \operatorname{End}_A(M)$, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $\Phi(M) \subset IM$. Докажите, что для какого-то характеристического полинома $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$, все коэффициенты $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$, кроме старшего, лежат в I.

Задача 10.6. Пусть $P(t)$ – характеристический полином для тождественного эндоморфизма $\mathsf{Id} \in \operatorname{End}_A(M)$, а $S \in A$ есть сумма всех коэффициентов P. Докажите, что $SM = 0$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гамильтона-Кэли.

Задача 10.7 (!). (Лемма Накаямы)
Пусть M – конечно-порожденный A-модуль, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $IM = M$. Докажите, что для какого-то $a \in I$, имеем $(1 - a)M = 0$.

Указание. Выведите из задачи 10.5, что существует характеристический полином $\mathsf{Chpoly}_{\mathsf{Id}}(t)$, все коэффициенты которого, кроме старшего, лежат в I, и примените предыдущую задачу.

Задача 10.8 (*). (теорема Крулля) Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в нетеровом кольце. Докажите, что $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

Задача 10.9 (!). Пусть A – кольцо без делителей нуля, а $k(A)$ – его поле частных. Рассмотрим функтор на A-модулях, $M \mapsto M \otimes_A k(A)$. Докажите, что этот функтор точен.

Определение 10.2. **Кручение** в A-модуле есть ядро естественного отображения $M \longrightarrow M \otimes_A k(A)$. Модуль M **без кручения**, если M вкладывается в $k(M)$.

Задача 10.10. Обозначим за $T(M)$ кручение M, то есть ядро $M \longrightarrow M \otimes_A k(M)$. Докажите, что функтор кручения $M \mapsto T(M)$ переводит точную последовательность $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ в точную

$$0 \longrightarrow T(M_1) \longrightarrow T(M_2) \longrightarrow T(M_3).$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что кручение $M/T(M)$ равно нулю.

Задача 10.11 (!). (Лемма Накаямы для модулей без кручения) Пусть A – кольцо без делителей нуля, M – конечно-порожденный A-модуль без кручения, а $I \subsetneq A$ – идеал в A, который удовлетворяет $IM = M$. Докажите, что $M = 0$.

Определение 10.3. Кольцо A называется **локальным**, если в A есть только один максимальный идеал.

Задача 10.12 (*). (лемма Накаямы для локальных колец)
Пусть M – конечно-порожденный модуль над нетеровым локальным кольцом A, $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал, а $M' \subset M$ его подмодуль, такой, что $M/\mathfrak{m}M = M'/\mathfrak{m}M'$. Докажите, что $M = M'$.

Задача 10.13 (*). Пусть M – конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом, а $\phi : M \longrightarrow M$ эпиморфизм. Докажите, что ϕ – изоморфизм.

10.2. Целые морфизмы

Определение 10.4. Морфизм аффинных многообразий $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение, **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ – конечно-порожденный $\mathcal{O}_Y$-модуль, и **целым**, если он доминантный и конечный.

Задача 10.14. Пусть $A \subset \mathbb{C}[x, y]$ – подкольцо, порожденное x^{100}, y^{666} и $xy(x^2 - 1)$. Докажите, что морфизм $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ целый.

Задача 10.15. Пусть $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ морфизм, заданный формулой $\phi(x) = x^{666}y^{18}$, $\phi(y) = x^{37}y$. Будет ли этот морфизм целым?

Задача 10.16 (!). Пусть $A \subset B$ подкольцо, причем B конечно порождено как A-модуль и без делителей нуля. Докажите, что для любого максимального идеала $I \subset A$, кольцо $B/IB = B \otimes_A (A/IA)$ конечномерно как векторное пространство над A/IA и нетривиально.

Указание. Воспользуйтесь леммой Накаямы.

Задача 10.17 (!). Докажите, что целый морфизм всегда сюрьективен, причем прообраз любой точки конечен.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.18 (*). Пусть $X \longrightarrow Y$ – целый морфизм, а $I \subset \mathcal{O}_X$ – ненулевой простой идеал. Докажите, что $I \cap \mathcal{O}_Y$ – тоже ненулевой идеал.

10.3. Целое замыкание

Определение 10.5. Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B, целых над A, называется **целым замыканием A в B**. Множество всех элементов поля частных A, целых над A, называется **целым замыканием** A. Кольцо $A \subset B$ называется **целозамкнутым в B,** если оно совпадает со своим целым замыканием в B, и **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $k(A)$.

Задача 10.19 (!). Пусть $A \subset B$ – кольца без делителей нуля, причем B конечно порождено как A-модуль. Рассмотрим их поля частных, $k(A) \subset k(B)$. Докажите, что $k(B)$ конечномерно над $k(A)$.

Определение 10.6. Пусть R – конечномерное кольцо над полем k. Рассмотрим билинейную форму $a, b \longrightarrow \mathsf{Tr}(ab)$, где $\mathsf{Tr}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \operatorname{End}_k R$, $x \overset{L_{ab}}{\mapsto} abx$. Такая форма называется **следом**.

Задача 10.20. Пусть K – конечное расширение поля k характеристики 0. Докажите, что форма Tr невырожденна на K.

Задача 10.21 (*). Приведите пример конечного расширения полей в характеристике p, для которого форма следа $a, b \longrightarrow \mathsf{Tr}(ab)$ вырожденна.

Задача 10.22 (!). Пусть $A \subset B$ кольца без делителей нуля, причем A целозамкнуто в своем поле частных, а B конечно порождено как A-модуль. Воспользовавшись вложением $k(A) \subset k(B)$, рассмотрим след $\mathsf{Tr}(b)$ для $b \in B \subset k(B)$. Докажите, что $\mathsf{Tr}(b) \in A$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что b целый над A, а $\mathsf{Tr}(b)$ – след матрицы L_b, и докажите, что $\mathsf{Tr}(b)$ целый над A.

Задача 10.23. Пусть A – кольцо без делителей нуля, M – конечно-порожденный A-модуль без кручения, а $V := M \otimes_A k(A)$ соответствующее векторное пространство. Рассмотрим невырожденную билинейную форму $g:\ V \times V \longrightarrow k(A)$, и предположим, что $g(m, m') \in A$ для каждых $m, m' \in M$. Докажите, что $M^* := \{x \in V \ \mid\ \forall m \in M,\ \ g(x, m) \in A\}$ содержит M.

Задача 10.24 (*). В условиях предыдущей задачи, всегда ли верно, что $M^* \cong \operatorname{Hom}_A(M, A)$?

Задача 10.25. Пусть $A \subset B$ кольца без делителей нуля, причем B конечно порождено как A-модуль. Докажите, что можно выбрать базис $e_1, ..., e_n$ в $k(B)$ над $k(A)$, такой, что все e_i лежат в $B \subset k(B)$.

Замечание. Отныне и до конца листка, мы будем предполагать, что все кольца и модули определены над полем характеристики 0.

Задача 10.26. В условиях предыдущей задачи, рассмотрим подмодуль $M_1 \subset B$, порожденный $e_1, ..., e_n$. Докажите, что $M_1^* \supset B$, где M_1^* взят относительно билинейной формы Tr, построенной выше.

Указание. Воспользуйтесь задачей 10.23 и невырожденностью Tr.

Задача 10.27. Пусть $[K : k]$ конечное расширение полей, $A \subset k$ подкольцо, а $M_1 \subset K$ – A-подмодуль K, порожденный базисом $e_1, ..., e_n$ в $[K : k]$. Докажите, что он свободный.[1] Рассмотрим модуль $M_1^* := \{x \in V \ \mid \ \forall m \in M, \ \ \mathsf{Tr}(x, m) \in A\}$. Докажите, что M_1^* тоже свободный.

Задача 10.28 (!). Пусть A – нетерово кольцо характеристики 0 без делителей нуля, $[K : k(A)]$ конечное расширение его поля частных, а B – целое замыкание A в K. Докажите, что B конечно порождено как A-модуль.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, чтобы реализовать B как подмодуль свободного модуля M_1^*.

Определение 10.7. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, без делителей нуля, а B его целое замыкание в $k(A)$. **Морфизм нормализации** есть морфизм $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, а $\operatorname{Spec} B$ называется **нормализацией** $\operatorname{Spec} A$.

Задача 10.29. Найдите неприводимое аффинное многообразие, которое не нормально, и определите его нормализацию.

Задача 10.30. Докажите, что морфизм нормализации – целый.

Задача 10.31 (!). Пусть $X' \xrightarrow{\phi} X$ – конечный бирациональный морфизм, а X нормально. Докажите, что ϕ – изоморфизм.

Указание. Убедитесь, что $\mathcal{O}_{X'} \supset \mathcal{O}_X$ содержится в целом замыкании $\mathcal{O}_X$.

Задача 10.32 (**). Пусть X – аффинное многообразие. Назовем рациональную функцию **локально ограниченной**, если она ограниченна в окрестности каждой точки X. Докажите, что X нормально тогда и только тогда, когда любая локально ограниченная рациональная функция на X регулярна.

Задача 10.33 (*). Докажите, что $\mathbb{C}[x^2, y^2, xy]$ целозамкнуто.

[1] Свободным A-модулем называется модуль, изоморфный A^n.