Алгебраическая геометрия 11: Лемма Нетер о нормализации и факторпространство

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

11.1. Лемма Нетер о нормализации

Задача 11.1. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, без делителей 0. Докажите, что поле частных $k(A)$ изоморфно конечному расширению поля $\mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$ рациональных функций.

Задача 11.2. Пусть $A = \mathcal{O}_X$ – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, без делителей 0, а $X \subset \mathbb{C}^n$ – аффинное подмногообразие. Предположим, что координантые функции $z_{i_1}\big|_X, ..., z_{i_k}\big|_X$ алгебраически независимы, а все остальные координантые функции алгебраически зависимы от них. Докажите, что поле частных $k(A)$ изоморфно конечному расширению поля $\mathbb{C}(z_{i_1}\big|_X, ..., z_{i_k}\big|_X)$.

Задача 11.3 (!). В условиях предыдущей задачи, рассмотрим проекцию $X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ по координатам $z_{i_1}, ..., z_{i_k}$. Докажите, что это отображение доминантно.

Задача 11.4. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, причем координаты $z_1, ..., z_k$ алгебраически независимы в $k(\mathcal{O}_X)$, а $z_{k+1}, ..., z_n$ алгебраически зависимы от них. Докажите, что существует многочлен $P(z_n)$ с коэффициентами в $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$ такой, что $P(z_n) = 0$.

Задача 11.5. В условиях предыдущей задачи, пусть $F(z_1, ..., z_k, z_n)$ – однородная компонента старшей степени d многочлена $P(z_1, ..., z_k, z_n)$, а $\lambda_1, ..., \lambda_k$ комплексные числа, такие, что $F(\lambda_1, ..., \lambda_k, 1) \neq 0$. Пусть $z_i' := z_i + \lambda_i z_n$, где $i = 1, ..., k$. Докажите, что у многочлена $Q(z_1', ..., z_k', z_n) := P(z_1 + \lambda_1 z_n, , , m z_k + \lambda_k z_n, z_n)$ коэффициент при z_n^d ненулевой.

Задача 11.6 (!). Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, причем координаты $z_1, ..., z_k$ алгебраически независимы в $k(\mathcal{O}_X)$, а $z_{k+1}, ..., z_n$ алгебраически зависимы от них. Выберем $z_1', ..., z_k'$ как в предыдущей задаче, и пусть $\mathcal{O}_{X'}$ – подкольцо в $\mathcal{O}_X$, порожденное $z_1', ..., z_k'$, $z_{k+1}, ..., z_{n+1}$, а X' – соответствующее аффинное многообразие. Докажите, что естественная проекция $X \longrightarrow X'$ конечна.

Указание. Убедитесь в том, что $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X'}[z_n]$, и проверьте, что z_n – целый над $\mathcal{O}_{X'}$

Задача 11.7 (!). Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, причем координаты $z_1, ..., z_k$ алгебраически независимы в $k(\mathcal{O}_X)$, а $z_{k+1}, ..., z_n$ алгебраически зависимы от них. Докажите, что после линейной замены $z_i \longrightarrow z_i + \sum_{j=k+1} \lambda_{i,j} z_j$, $i = 1, ..., k$, проекция $X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ на координаты $z_1, ..., z_k$ – конечный морфизм.

Указание. Примените предыдущую задачу, и воспользуйтесь индукцией по n.

Определение 11.1. $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, а проекция $X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ на координаты $z_1, ..., z_k$ – конечный морфизм. Элемент $z \in \mathcal{O}_X$ называется **примитивным**, если $z_1, ..., z_k, z$ порождают поле $k(X)$ рациональных функций на X.

Задача 11.8. В условиях этого определения, докажите, что $z \in \mathcal{O}_X$ примитивен тогда и только тогда, когда z не содержится в собственном подполе $\mathbb{C}(z_1, ..., z_k) \subsetneq K \subsetneq k(X)$.

Задача 11.9 (!). В этих условиях, обозначим за $\mathbb{K}$ алгебраическое замыкание поля $\mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$. Докажите, что $k(X) \otimes_{\mathbb{C}(z_1,...,z_k)} \mathbb{K}$ есть прямая сумма конечного числа полей, изоморфных $\mathbb{K}$, и каждое промежуточное подполе $k(X) \supset K \supset \mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$ соответствует одному из прямых слагаемых в кольце $k(X) \otimes_{\mathbb{C}(z_1,...,z_k)} \mathbb{K}$.

Задача 11.10. В этих условиях, докажите, что число промежуточных полей $k(X) \supset K \supset \mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$ конечно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.11 (!). (теорема о примитивном элементе) Докажите, что общая линейная комбинация $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i z_i$ всегда примитивна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.12. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое многообразие, такое, что проекция $X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ на координаты $z_1, ..., z_k$ – конечный морфизм, а z_{k+1} – примитивный элемент. Обозначим за X' проекцию X на координаты $z_1, ..., z_k, z_{k+1}$. Докажите, что $k(X') = k(X)$.

Задача 11.13. В условиях предыдущей задачи, докажите, что проекция $X' \longrightarrow X$ конечна и бирациональна.

Задача 11.14 (!). (Лемма Нетер о нормализации) Пусть X – аффинное многообразие. Докажите, что существует унитарный полином $P(t)$ с коэффициентами в $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$, и бирациональная, конечная проекция из на множество решений уравнения $P(z_1, ..., z_k, t) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.15 (*). Докажите, что на любом многообразии найдется гладкая точка.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.16 (*). Докажите, что множество особых точек заданного многообразия всегда алгебраично.

Задача 11.17 (*). Пусть $X \subsetneq Y$ – неприводимые многообразия. Докажите, что степень трансцендентности поля частных X строго меньше, чем степень трансцендентности поля частных Y.

11.2. Факторпространство

Определение 11.2. Пусть G – конечная группа, действующая автоморфизмами на аффинном многообразии A, $\mathcal{O}_A$ – кольцо регулярных функций, а $\mathcal{O}_A^G$ – кольцо инвариантов. В силу теоремы Нетер, $\mathcal{O}_A^G$ конечно порождено, значит, является кольцом функций на аффинном многообразии $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_A^G)$. Обозначим $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_A^G)$ за A/G. Это многообразие называется **факторпространством A по действию G**.

Задача 11.18. Пусть A неприводимо. Докажите, что A/G тоже неприводимо.

Задача 11.19. Пусть группа $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует на одномерной аффинной плоскости $\mathbb{C}$ умножением на примитивный корень $\sqrt[n]{1}$. Докажите, что $\mathbb{C}/G$ гладко.

Задача 11.20. Пусть M – гладкое аффинное многообразие. Обозначим за $m_x \subset \mathcal{O}_M$ максимальный идеал точки $x \in M$ Докажите, что $\dim m_x/m_x^2$ локально постоянно как функция x.

Задача 11.21. Докажите, что $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ не гладко.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.22 (*). Пусть $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – конечная подгруппа в $SU(2)$, которая действует на $\mathbb{C}^2$ как диагональная матрица, с собственными значениями $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$. Докажите, что $\mathbb{C}^2/G$ не гладко.

Задача 11.23 (*). Пусть G – группа симметрий квадрата, действующая на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим ее действие на $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Докажите, что $\mathbb{C}^2/G$ гладко.

11.3. Кольцо G-инвариантов и максимальные идеалы в нем

Задача 11.24 (!). Докажите **теорему о примитивном элементе:** любое конечное расширение полей $[K : k]$ характеристики нуль можно породить над k одним элементом $x \in K$.[1]

Задача 11.25 (!). Пусть G – конечная группа, которая действует на кольце R без делителей нуля автоморфизмами. Докажите, что соответствующее расширение полей $[k(R) : k(R^G)]$ конечно.

[1] Такой x называется **примитивным**.

Указание. Убедитесь, что что каждый $f \in R$ удовлетворяет уравнению $\prod_{g \in G}(t - g(f)) = 0$ с коэффициентами в R^G. Выведите из этого, что все элементы $k(G)$ алгебраичны над $k(R^G)$. Получите оценку $\dim_{k(R^G)} k(R) \leqslant |G|$, воспользовавшись теоремой о примитивном элементе.

Задача 11.26. В этих условиях, докажите, что R содержится в целом замыкании R^G в поле частных $k(R)$.

Указание. Убедитесь, что что каждый $f \in R$ удовлетворяет уравнению $\prod_{g \in G}(t - g(f)) = 0$ с коэффициентами в R^G.

Задача 11.27 (!). Пусть R – конечно-порожденное кольцо без делителей нуля, снабженное действием конечной группы G, а R^G – кольцо инвариантов. Докажите, что $\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} R^G$ – целый морфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.28. Рассмотрим морфизм $\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\phi} \operatorname{Spec} R^G$. Пусть $x, y \in \operatorname{Spec} R$ две точки, которые удовлетворяют $g(x) = y$. Докажите, что $\phi(x) = \phi(y)$.

Задача 11.29. Пусть A есть прямая сумма нескольких копий $\mathbb{C}$, а конечная группа G действует на A автоморфизмами, таким образом, что $A^G = \mathbb{C}$. Докажите, что G действует транзитивно на множестве простых идеалов A.

Задача 11.30. Пусть R – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, снабженное действием конечной группы G, $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал точки $y \in \operatorname{Spec} R^G$, а $A := R/\mathfrak{m}R$. Докажите, что A конечномерно над $\mathbb{C}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что R конечно порождено как R^G-модуль.

Задача 11.31. В условиях предыдущей задачи, докажите, что $A^G = \mathbb{C}$.

Указание. Убедитесь, что $(\mathfrak{m}R)^G = \mathfrak{m}$, и выведите из этого $A^G = R^G/\mathfrak{m}$.

Задача 11.32 (!). Пусть R – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, снабженное действием конечной группы G, $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал точки $y \in \operatorname{Spec} R^G$, а $A := R/\mathfrak{m}R$. Докажите, что G транзитивно действует на максимальных идеалах A.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, и примените задачу 11.29.

Задача 11.33 (!). В условиях предыдущей задачи, постройте биекцию между $\operatorname{Spec} R^G$ и множеством G-орбит в $\operatorname{Spec} R$.

Задача 11.34. Пусть G – счетная группа, действующая на аффинном многообразии X автоморфизмами, а $Y := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X^G)$. Приведите пример, когда G бесконечная группа, а морфизм $X \longrightarrow Y$ не конечный.

Задача 11.35 (*). В условиях предыдущей задачи, предположим, что все орбиты G конечные. Следует ли из этого, что морфизм $X \longrightarrow Y$ конечный?