

Алгебраическая геометрия 3: Нетеровы кольца

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

3.1. Условия обрыва цепочек

Определение 3.1. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Говорится, что в S выполнено **условие обрыва возрастающих цепочек**, если для каждой последовательности элементов S $a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq a_4 \preceq \dots$ все a_i , кроме конечного числа, равны друг другу. Аналогично, выполнено **условие обрыва убывающих цепочек**, если в $b_1 \succeq b_2 \succeq b_3 \succeq b_4 \succeq \dots$ равны друг другу все b_i , кроме конечного числа.

Задача 3.1. Пусть M – топологическое пространство а S – множество открытых подмножеств M , упорядоченное по вложению. Докажите, что условие обрыва возрастающих цепочек в S влечет компактность M .

Определение 3.2. Такое топологическое пространство называется **нетеровым**.

Задача 3.2. Пусть M – хаусдорфово, нетерово топологическое пространство. Докажите, что в нем конечное число точек.

Определение 3.3. Пусть R – кольцо, а S – множество всех идеалов в R , упорядоченное по вложению. Кольцо R называется **нетеровым**, если в S выполнено условие обрыва возрастающих цепочек, и **артиновым**, если выполнено условие обрыва убывающих цепочек.

Задача 3.3. Пусть R – кольцо, у которого есть всего один простой идеал. Всегда ли R артиново?

Задача 3.4. Рассмотрим кольцо R как модуль над собой. Докажите, что подмодули R суть в точности идеалы кольца R .

Определение 3.4. M есть **конечно порожденный модуль над R** если существует конечный набор $r_1, \dots, r_n \in M$ такой, что $R \cdot r_1 + R \cdot r_2 + R \cdot r_3 + \dots + R \cdot r_n$. В такой ситуации, $\{r_i\}$ называются образующими. Идеал в кольце R называется **конечно-порожденным**, если он конечно порожден как R -модуль.

Задача 3.5. Докажите, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}[t]$ нетеровы.

Задача 3.6. Пусть R – нетерово кольцо, $F \in R$, а $R(F)$ – локализация R по F (кольцо, полученное из R присоединением к нему F^{-1}). Докажите, что $R(F)$ – тоже нетерово.

Задача 3.7. Постройте кольцо, которое не нетерово и не артиново.

Задача 3.8 (*). Пусть M – окружность, а $C(M)$ – кольцо непрерывных функций на M . Докажите, что $C(M)$ – не нетерово. Является ли оно артиновым?

Задача 3.9 (!). Докажите, что кольцо R нетерово тогда и только тогда, когда любой его идеал конечно порожден.

3.2. Нетеровы модули

Определение 3.5. Нетеров модуль есть R -модуль, в котором выполнено условие обрыва возрастающих цепочек для подмодулей.

Задача 3.10. Докажите, что любые подмодули и фактормодули нетерова R -модуля снова нетеровы.

Определение 3.6. Короткая точная последовательность модулей над кольцом R есть последовательность R -модулей и гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{e} M_3 \longrightarrow 0$$

такая, что $i \circ e = 0$, а ядро e совпадает с образом i .

Задача 3.11 (!). Пусть $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{e} M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R -модулей, причем M_1 и M_3 нетеровы. Докажите, что M_2 тоже нетерово.

Определение 3.7. Пусть R – какое-то кольцо, а $\mathbb{Z}[\text{Mod}]$ – свободная группа, образующими которой являются классы изоморфизма конечно-порожденных R -модулей. Обозначим за $K_0(R)$ группу Гротендика кольца R , полученную из $\mathbb{Z}[\text{Mod}]$ факторизацией по всем соотношениям вида $[M_2] - [M_1] - [M_0]$, для всех точных последовательностей $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$.

Задача 3.12. Докажите, что группа $K_0(R)$ порождена классами $[M]$ для всех циклических модулей M над R .

Задача 3.13. Докажите, что $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$, если R – кольцо главных идеалов, где нет делителей нуля (такое кольцо называется **целостным**).

Задача 3.14 (*). Пусть $u : M \longrightarrow M$ – сюръективный эндоморфизм нетерова R -модуля. Докажите, что он инъективен.

Указание. Примените условие обрыва к цепочке $\ker u \subset \ker u^2 \subset \dots$

Определение 3.8. R -модуль M называется **циклическим**, если он изоморфен R/I , где I – какой-то идеал.

Задача 3.15. Докажите, что R -модуль циклический тогда и только тогда, когда он порожден над R всего одним элементом $r \in M$, то есть имеет вид $R \cdot r$.

Задача 3.16. Пусть R нетерово кольцо, а M – циклический модуль над R . Докажите, что он нетеров.

Задача 3.17 (!). Пусть M – R -модуль. Докажите, что M конечно порожден тогда и только тогда, когда существует фильтрация $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ R -подмодулями, причем все подфакторы вида M_i/M_{i-1} циклические, а n есть минимальное число образующих M .

Задача 3.18 (!). Пусть R нетерово кольцо, а M – R -модуль. Докажите, что M конечно-порожденный тогда и только тогда, когда он нетеров.

Указание. Воспользуйтесь индукцией по числу образующих и примените задачу 3.11.

3.3. Теорема Гильберта о базисе

Для какого-то кольца R , обозначим за $R[t]$ кольцо полиномов с коэффициентами в R .

Задача 3.19. Пусть R – нетерово кольцо, $I \subset R[t]$ – идеал, $M \subset I$ – множество всех полиномов из I степени не больше $N \in \mathbb{N}$, а $I_N \subset I$ – идеал, порожденный M . Докажите, что I_N конечно порожден.

Указание. Постройте инъективный гомоморфизм R -модулей $M \hookrightarrow R^{N+1}$. Воспользуйтесь тем, что R^{N+1} нетеров модуль, чтобы найти набор $r_1, \dots, r_n \in M$, порождающий I_N .

Задача 3.20. Пусть $I \subset R[t]$ идеал, а $P \in I$ полином со старшим коэффициентом a , причем $a = \sum a_i b_i$, где a_i – старшие коэффициенты полиномов $P_1, \dots, P_n \in I$, а $b_i \in R$ – какие-то элементы. Предположим, что $\deg P_i \leq N$. Докажите, что существуют такие полиномы $Q, Q_i \in R[t]$, что $P = Q + \sum Q_i P_i$, причем $\deg Q < N$.

Указание. Поделите P в столбик на полином $\sum_i P_i b_i t^{N - \deg P_i}$.

Задача 3.21. Пусть R – нетерово кольцо, $I \subset R[t]$ идеал, а $I_{st} \subset R$ – идеал в R , порожденный старшими коэффициентами всех полиномов $P \in I$. Пусть $a_1, \dots, a_n \in I_{st}$ – набор образующих для I_{st} , а $P_1, \dots, P_n$ – полиномы в I со старшими коэффициентами a_i (выведите из нетеровости, что такие полиномы и образующие существуют). Пусть $\deg P_i \leq N$. Обозначим за $\check{I}$ идеал, порожденный всеми P_i , $i = 1, \dots, n$. Докажите, что каждый полином $P \in I$ удовлетворяет $P = Q \pmod{\check{I}}$, где $\deg Q < N$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.22 (!). Докажите теорему Гильберта о базисе: для любого нетерова кольца R , кольцо $R[t]$ тоже нетерово.

Указание. Пусть $\check{I} \subset I$ – идеал, построенный в задаче 3.21, а I_N – идеал, построенный в задаче 3.19. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что $I = I_N + \check{I}$, и убедитесь, что эти два идеала конечно-порождены.

3.4. Нетеровы кольца

Задача 3.23. Пусть $R \subset \mathbb{C}(t)$ – кольцо рациональных функций с полюсами в целых точках. Будет ли оно нетерово?

Задача 3.24 (*). Пусть R – нетерово кольцо, а $R[[t]]$ – кольцо степенных рядов над R . Докажите, что оно нетерово.

Задача 3.25. Пусть $R \subset \mathbb{C}[[t]]$ – кольцо степенных рядов, сходящихся в некоторой окрестности 0 ("кольцо ростков голоморфных функций в нуле"). Нетерово ли оно?

Задача 3.26 (*). Пусть $R \subset \mathbb{C}[[t]]$ – кольцо степенных рядов, сходящихся везде в $\mathbb{C}$ (такое кольцо называется **кольцом целых функций**). Нетерово ли оно?

Задача 3.27 (*). Пусть R – кольцо многочленов $P \in \mathbb{C}[x, y]$ таких, что все частные производные от P по y равны нулю в точке $(x, y) = (0, 0)$. Нетерово ли оно?

Задача 3.28 (*). Пусть R – нетерово кольцо над $\mathbb{C}$, G – конечная группа, действующая на R автоморфизмами, а $R^G \subset R$ – кольцо G -инвариантов. Всегда ли R^G нетерово?

Задача 3.29. Пусть $R[t]$ нетерово. Следует ли из этого, что R тоже нетерово?