Алгебраическая геометрия 4: Неприводимые многообразия

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

4.1. Гладкие точки

Определение 4.1. Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество. Точка $a \in A$ называется **гладкой**, если существует открытая окрестность $A \supset U \ni a$, которая диффеоморфна гладкому многообразию, и полиномиальный диффеоморфизм $U \longrightarrow B \subset \mathbb{C}^k$ на открытый шар $B \subset \mathbb{C}^k$. В такой ситуации, многообразие A называется **k-мерным в окрестности** $a \in A$. Точка называется **особой**, или **особенностью**, если такого диффеоморфизма не существует. Многообразие называется **гладким**, если у него нет особенностей, и **особым** в противном случае.

Задача 4.1. Пусть $A \subset \mathbb{C}^2$ задано однородным уравнением $ax^2+bxy+cy^2 = 0$. Докажите, что оно гладко если и только если $b^2 - 4ac = 0$.

Задача 4.2. Найдите пример особого многообразия A, которое k-мерно в окрестности $a \in A$, и k'-мерно в окрестности $a' \in A$, причем $k \neq k'$.

Задача 4.3. Пусть $f_1, ..., f_k$ – набор полиномов, а a гладкая точка на многообразии A, k-мерном в ее окрестности, такая, что ограничения дифференциалов $df_i\Big|_{T_a A}$ линейно независимы в a. Докажите, что $\langle f_1, ..., f_k\rangle : A \longrightarrow \mathbb{C}^k$ – диффеоморфизм из какой-то окрестности $a \in A$ на ее образ.[1]

Указание. Воспользуйтесь теоремой об обратной функции.

Задача 4.4. Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ – изоморфизм аффинных многообразий, $a \in A$, $\phi(a) = b$. Пусть a – гладкая точка A. Докажите, что b – гладкая точка B.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

[1] В такой ситуации, говорят, что это “диффеоморфизм в окрестности ”.

Задача 4.5 (!). Докажите, что $a \in A \subset \mathbb{C}^n$ – гладкая точка тогда и только тогда, когда для какой-то линейной проекции $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{C}^k$, μ определяет диффеоморфизм в какой-то окрестности $a \in A$.

Задача 4.6 (!). Пусть M - многообразие, $x \in M$ – гладкая точка размерности n, а m_x – ее максимальный идеал. Докажите, что размерность m_x/m_x^2 равна n.

Указание. Применив предыдущую задачу, убедитесь, что достаточно доказать сей факт для $\mathbb{C}^n$.

Задача 4.7. Докажите, что многообразие $A \subset \mathbb{C}^2$, заданное уравнением $x^2 = y^3$, негладко.

Задача 4.8 (*). Докажите, что множество особых точек алгебраического многообразия алгебраично.

4.2. Неприводимые многообразия

Определение 4.2. Аффинное многообразие A называется **приводимым**, если оно может быть разбито в объединение $A = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 – аффинные многообразия, причем $A_1 \not\subset A_2$ и $A_2 \not\subset A_1$. Если такое разложение невозможно, A называется **неприводимым**.

Задача 4.9 (!). Докажите, что A неприводимо $\Leftrightarrow$ кольцо регулярных функций $\mathcal{O}_A$ не имеет делителей нуля.[2]

Задача 4.10. Пусть f и g – рациональные функции на гладком аффинном многообразии M, причем $fg = 0$ в какой-то окрестности $x \in M$. Докажите, что $f = 0$ либо $g = 0$ в какой-то окрестности x.

Задача 4.11 (!). Пусть A гладко и связно. Докажите, что оно неприводимо.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 4.3. **Идемпотент** кольца есть такой элемент $s \in R$, что $s^2 = s$. **Нетривиальный идемпотент** есть идемпотент, который не равен 1 и 0.

Задача 4.12. Пусть A – аффинное многообразие, такое, что в $\mathcal{O}_A$ есть нетривиальный идемпотент. Докажите, что A приводимо.

Задача 4.13. Приведите пример приводимого аффинного многообразия, такого, что $\mathcal{O}_A$ не содержит нетривиальных идемпотентов.

[2] Такое кольцо называется **целостным**.

Задача 4.14. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает связное и гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$.

Задача 4.15. Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ задано однородным уравнением $x^2 + bxy + cy^2 = 0$. Докажите, что оно неприводимо если и только если $b^2 - 4ac = 0$.

Задача 4.16. Пусть A – многообразие, такое, что множество гладких точек A плотно в A и связно. Докажите, что A неприводимо.

Задача 4.17 (*). Докажите, что множество гладких точек любого аффинного многообразия плотно в нем.

Определение 4.4. Собственное подмногообразие A есть подмногообразие, которое не равно A.

Задача 4.18 (!). Пусть $\phi: A \longrightarrow B$ – морфизм аффинных многообразий, причем образ A не содержится ни в каком собственном подмногообразии B, а $\tilde{\phi}: \mathcal{O}_B \longrightarrow \mathcal{O}_A$ – соответствующий гомоморфизм колец. Докажите, что $\tilde{\phi}$ инъективно.

Задача 4.19. Пусть $\phi: A \longrightarrow B$ – морфизм аффинных многообразий, причем образ A не содержится ни в каком собственном подмногообразии B. Предположим, что A неприводимо. Докажите, что B тоже неприводимо.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.20. Пусть $A \subset \mathbb{C}^2$ – подмногообразие, заданное уравнением $x^2 = y^3$. Докажите, что оно неприводимо.

Указание. Представьте A как образ отображения $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $t \longrightarrow t^3, t^2$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.21 (*). Пусть $A \subset \mathbb{C}^2$ – подмногообразие, заданное уравнением $x^p = y^q$. Докажите, что оно неприводимо тогда и только тогда, когда p и q взаимно просты.

Задача 4.22 (*). Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – подмногообразие, заданное уравнением $x_1^{p_1} = x_2^{p_2} = ... = x_n^{p_n}$. Докажите, что оно неприводимо, если все p_i – попарно различные простые числа.

Задача 4.23 (*). Пусть $P(x_1, ..., x_n)$ – неприводимый полином. Докажите, что многообразие $P(x_1, ..., x_n) = 0$ неприводимо.

Задача 4.24 (*). Пусть X, Y – неприводимые многообразия в $\mathbb{C}^3$, причем X задано полиномиальным уравнением $P = 0$, а Y – уравнением $Q = 0$. Всегда ли $X \cap Y$ неприводимо?

Задача 4.25. Пусть X, Y – неприводимые аффинные многообразия. Проверьте, что $X \times Y$ – тоже аффинное многообразие. Всегда ли произведение $X \times Y$ неприводимо?

Задача 4.26 (*). Пусть G – конечная группа, действующая на неприводимом аффинном многообразии M автоморфизмами. Рассмотрим множество M^G неподвижных точек G. Докажите, что оно алгебраично. Всегда ли оно неприводимо?

4.3. Неприводимые компоненты

Определение 4.5. Неприводимая компонента алгебраического множества A есть неприводимое подмножество $A' \subset A$ такое, что $A = A' \cup A''$, причем $A' \not\subset A$.

Задача 4.27. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ – последовательность убывающих алгебраических подмножеств в аффинном многообразии. Докажите, что только конечное число A_i различны.

Указание. Воспользуйтесь нетеровостью.

Задача 4.28 (!). Докажите, что каждое аффинное многообразие есть объединение его неприводимых компонент, которых конечное число.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 4.6. Разложение аффинного многообразия M в объединение его неприводимых компонент называется **неприводимым разложением** M.

Задача 4.29. Докажите, что каждое неприводимое подмногообразие M содержится в одной из неприводимых компонент M.