Алгебраическая геометрия 6: Артиновы кольца и идемпотенты

Здесь (как и во всех других листочках) **кольцо** обозначает коммутативное кольцо с единицей, **алгебра** – ассоциативная и над полем.

Определение 6.1. Пусть дана коммутативная R алгебра с единицей над полем k. Говорят, что R **артиново кольцо над полем** k, если R конечномерна как векторное пространство.

Задача 6.1. Пусть дан линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$, где V конечномерно. Рассмотрим подалгебру в $\operatorname{End} V$, порожденную k и A. Докажите, что это артиново кольцо над k.

Определение 6.2. Элемент $r \in R$ в алгебре (или кольце) R называется **нильпотентным**, или **нильпотентом**, если $r^k = 0$, для какого-то $k \in \mathbb{N}$.

Задача 6.2. Пусть r, r' – нильпотентные элементы в алгебре $\operatorname{End}(V)$. Всегда ли $r + r'$ нильпотентен?

Задача 6.3. Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – нильпотентный оператор. Докажите, что $\mathsf{tr}(A) = \det(A) = 0$, а характеристический полином $\mathsf{chpoly}_A(t) = t^{\dim V}$.

Задача 6.4. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Задача 6.5. Рассмотрим множество всех нильпотентных элементов в кольце R. Докажите, что это идеал.

Определение 6.3. Этот идеал называется **нильрадикалом** кольца R.

Задача 6.6. Рассмотрим фактор кольца $R/\mathfrak{n}$ по его нильрадикалу. Докажите, что в $R/\mathfrak{n}$ нет ненулевых нильпотентов.

Определение 6.4. Артиново кольцо R называется **полупростым**, если в нем нет ненулевых нильпотентов.

Определение 6.5. Пусть $R_1, \dots, R_n$ – алгебры над полем. Возьмем прямую сумму $\oplus R_i$, с естественным (почленным) умножением и сложением. Получившаяся алгебра называется **прямой суммой** R_i, обозначается $\oplus R_i$.

Задача 6.7. Докажите, что прямая сумма полупростых артиновых колец полупроста.

Задача 6.8. Пусть v – элемент конечномерной алгебры R над k. Рассмотрим подпространство R, порожденное $1, v, v^2, v^3, \dots$ (для всех степеней v). Пусть оно n-мерно. Докажите, что $P(v) = 0$ для некоторого полинома $P = t^{n+1} + a_n t^n + \dots$ с коэффициентами из k. Докажите, что такой полином единственный.

Определение 6.6. Этот полином называется **минимальным полиномом** элемента v и обозначается $\mathsf{Minpoly}(v)$.

Задача 6.9. Пусть $v \in R$ – элемент артинового кольца над k, а $P(t)$ – его минимальный полином. Рассмотрим подалгебру R_v, порожденную v и k. Докажите, что R_v изоморфно кольцу $k[t]/P$ остатков по модулю P.

Определение 6.7. Пусть $v \in R$ – такой элемент алгебры R, что $v^2 = v$. Тогда v называется **идемпотентом**.

Задача 6.10. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Докажите, что $1 - e$ тоже идемпотент. Докажите, что произведение идемпотентов – идемпотент.

Задача 6.11. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Рассмотрим пространство $eR \subset R$ (образ умножения на e). Докажите, что eR – подалгебра в R, e – единичный элемент в eR, и $R = eR \oplus (1 - e)R$.

Задача 6.12 (!). Пусть $R = k[t]/P$, где P – полином, который разлагается в произведение попарно взаимно простых полиномов, $P = P_1 P_2 \dots P_n$. Докажите, что в R есть n идемпотентов $e_1, \dots, e_n \subset R$, причем $e_i R \cong k[t]/P_i$.

Задача 6.13. Пусть R – полупростое артиново кольцо без неединичных идемпотентов. Докажите, что это поле.

Указание. Пусть R – не поле. Рассмотрите подалгебру $k[x] \subset R$, порожденную необратимым элементом $x \in R$, и примените к ней утверждение предыдущей задачи.

Определение 6.8. Говорят, что два идемпотента $e_1, e_2 \in R$ в коммутативной алгебре R **ортогональны**, если $e_1 e_2 = 0$.

Задача 6.14. Пусть $e_2, e_3 \in R$ – идемпотенты, причем $e_1 = e_2 + e_3$, а e_2 и e_3 ортогональны. Докажите, что e_1 – тоже идемпотент, причем $e_2, e_3 \in e_1 R$ и $e_1 R = e_2 R \oplus e_3 R$.

Задача 6.15. Пусть $\mathsf{char}\, k \neq 2$. Предположим, что e_1, e_2, e_3 – идемпотенты в артиновом кольце R над k, и $e_1 = e_2 + e_3$. Докажите, что e_2 и e_3 ортогональны.

Определение 6.9. Пусть R – артиново кольцо над полем k, Идемпотент e в R называется **неразложимым**, если нельзя найти такие ненулевые ортогональные идемпотенты e_2, e_3, что $e_1 = e_2 + e_3$.

Задача 6.16 (!). Пусть R полупростое артиново кольцо, а e – неразложимый идемпотент. Докажите, что eR – поле.

Задача 6.17 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, Докажите, что 1 разлагается в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов: $1 = \sum e_i$. Докажите, что это разложение единственно.

Указание. Для существования, возьмите какой-нибудь идемпотент $e \in R$, разложите $R = eR \oplus (1-e)R$, и воспользуйтесь индукцией. Для единственности, перемножьте два возможных разложения 1.

Задача 6.18 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, Докажите, что R изоморфно прямой сумме полей.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.19 (*). Пусть R – артиново кольцо над полем k, а $1 = e_1 + \cdots + e_n$ – разложение 1 в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов. Докажите, что у R есть ровно n простых идеалов.

Определение 6.10. Пусть R – алгебра над полем k, а g – симметричная билинейная форма на R. Форма g называется **инвариантной**, если $g(x, yz) = g(xy, z)$ для любых x, y, z.

Замечание. Если R содержит единицу, то для любой инвариантной формы g, имеем $g(x, y) = h(xy, 1)$, то есть g определяется линейным функционалом.

Задача 6.20. Пусть R – артиново кольцо, снабженное билинейной инвариантной формой g, а $\mathfrak{m}$ – идеал в R. Докажите, что его ортогональное дополнение $\mathfrak{m}^\perp$ – тоже идеал.

Задача 6.21 (*). Найдите артиново кольцо, не допускающее невырожденной инвариантной билинейной формы.

Задача 6.22 (!). Пусть R – артиново кольцо над полем k. Рассмотрим билинейную форму $a, b \longrightarrow \mathsf{tr}(ab)$, где $\mathsf{tr}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \operatorname{End}_k R$, $x \overset{L_{ab}}{\mapsto} abx$. Докажите, что если эта форма невырождена, то R полупросто. Докажите, что если R полупросто, а $\mathsf{char}\, k = 0$, то эта форма невырождена.

Указание. В одну сторону, воспользуйтесь задачей 6.3. В другую сторону, рассмотрите сначала ситуацию когда R – поле.

Задача 6.23. Пусть V, V' – векторные пространства над k, снабженные билинейными формами g, g'. Определим на $V \otimes V'$ билинейную форму $g \otimes g'$, исходя из

$$g \otimes g'(v \otimes v', w \otimes w') = g(v, w)g'(v', w')$$

Докажите, что это определение корректно, и единственным образом задает билинейную форму на $V \otimes V'$.

Задача 6.24. Докажите, что алгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ полупроста, и разложите ее в прямую сумму полей.

Задача 6.25. Докажите, что алгебра $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ полупроста, и разложите ее в прямую сумму полей.

Задача 6.26 (!). Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – полиномы над полем k. Обозначим $K_1 = k[t]/P(t)$ и $K_2 = k[t]/Q(t)$. Докажите, что $K_1 \otimes K_2 \cong K_1[t]/Q(t) \cong K_2[t]/P(t)$.

Задача 6.27 (*). Пусть R, R' – артиновы кольца над k, $\operatorname{\mathsf{char}} k = 0$. Обозначим естественные билинейные формы $a, b \longrightarrow \operatorname{\mathsf{tr}}(ab)$ на них через g, g'. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes R'$ с естественной структурой артиновой алгебры. Рассмотрим форму $g \otimes g'$ на $R \otimes R'$. Докажите, что $g \otimes g'$ равна форме $a, b \longrightarrow \operatorname{\mathsf{tr}}(ab)$.

Задача 6.28 (*). Докажите, что тензорное произведение полупростых артиновых колец над полем k характеристики 0 полупросто.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.22.

Задача 6.29 (*). Найдите такие два поля K_1, K_2, алгебраических над $\mathbb{Q}$ и не равных $\mathbb{Q}$, что $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ – тоже поле.

Задача 6.30 (*). Пусть $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ – многочлен, у которого есть ровно r вещественных корней и ровно $2s$ комплексных, но не вещественных, причем все корни разные. Докажите, что

$$(\mathbb{Q}[t]/P) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \bigoplus_s \mathbb{C} \oplus \bigoplus_r \mathbb{R}.$$

Задача 6.31 (*). Пусть $P(t)$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{Q}$, у которого нет вещественных корней, а $v \in \mathbb{Q}[t]/P$ – любой элемент, не лежащий в $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[t]/P$. Докажите, что у минимального полинома элемента v нет вещественных корней.