Алгебраическая геометрия 7: тензорные произведения модулей

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

7.1. Тензорные произведения R-модулей

Замечание. Все кольца в этом листке предполагаются коммутативными и с единицей.

Определение 7.1. Пусть R – кольцо, M, M' – R-модули. Обозначим за $M \otimes_R M'$ R-модуль, который порожден символами вида $m \otimes m'$, $m \in M, m' \in M'$, по модулю соотношений вида $r(m \otimes m') = (rm) \otimes m' = m \otimes (rm')$, $(m + m_1) \otimes m' = m \otimes m' + m_1 \otimes m'$, $m \otimes (m' + m_1') = m \otimes m' + m \otimes m_1'$. Такой R-модуль называется **тензорным произведением M и M'.**

Определение 7.2. Пусть M_1, M_2, M – R-модули. **Билинейное отображение** $(M_1, M_2) \xrightarrow{\phi} M$ есть отображение, которое удовлетворяет условиям $\phi(rm, m') = \phi(m, rm') = r\phi(m, m')$, $\phi(m + m_1, m') = \phi(m, m') + \phi(m_1, m')$, $\phi(m, m' + m_1') = \phi(m, m') + \phi(m, m_1')$.

Задача 7.1. Постройте биективное соответствие между множеством гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes_{\mathbb{R}} M_2, M)$ и множеством билинейных отображений $\mathrm{Bil}(M_1 \times M_2, M)$.

Определение 7.3. Пусть M, M' – R-модули. Рассмотрим группу $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ гомоморфизмов. Определим на $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ структуру R-модуля, по формуле $(r\phi)(m) := \phi(rm)$. Этот модуль называется **модулем гомоморфизмов**.

Задача 7.2. Докажите, что $\mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes_{\mathbb{R}} M_2, M) = \mathrm{Hom}_R(M_1, \mathrm{Hom}_R(M_2, M))$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.3. Постройте билинейное отображение $M_1 \times M_2 \xrightarrow{\tau} M_1 \otimes M_2$.

Задача 7.4 (!). (Универсальное свойство тензорного произведения) Докажите, что для каждого билинейного отображения $B: M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ существует единственный гомоморфизм $b: M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} M_1 \times M_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "B"'] & M_1 \otimes M_2 \arrow[d, "b"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Определение 7.4. Пусть $\mathcal{C}$ – категория, Объект $O \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ называется **начальным** (универсально отталкивающим), если из O существует единственный морфизм в любой другой объект $\mathcal{C}$, и **конечным** (универсально притягивающим), если в O существует единственный морфизм из любого другого.

Задача 7.5. Докажите, что начальный и конечный объекты единственны.

Задача 7.6. Постройте начальный и конечный объекты в категории множеств.

Задача 7.7. Есть ли начальный объект в категории накрытий многообразия M? (морфизмы накрытий суть непрерывные отображения, которые коммутируют с проекцией в M)? Есть ли конечный объект?

Задача 7.8. Пусть M_1, M_2 – R-модули, а $\mathcal{C}$ – следующая категория. Объекты $\mathcal{C}$ суть пары (R-модуль M, билинейное отображение $M_1 \times M_2 \longrightarrow M$), а морфизмы – гомоморфизмы $M \xrightarrow{\phi} M'$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} M_1 \times M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Id}"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ M_1 \times M_2 \arrow[r] & M' \end{tikzcd}$$

Докажите, что тензорное произведение $M_1 \otimes M_2$ есть начальный объект в категории $\mathcal{C}$.

Указание. Выведите это из универсального свойства тензорного произведения.

Задача 7.9 (!). Пусть M, M' – R-модули, а M_1 и M_2 удовлетворяют "универсальному свойству тензорного произведения": для любого билинейного отображения $B: \quad M \times M' \longrightarrow N$ существует единственный гомоморфизм b : $M \times M' \longrightarrow M_i$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} M \times M' \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mathsf{Id}"'] & M_i \arrow[d, "\phi"] \\ M \times M' \arrow[r, "B"] & N \end{tikzcd}$$

Докажите, что M_1 изоморфно M_2.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.10. Докажите, что тензорное произведение ассоциативно:
$M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3) \cong (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3$.

Указание. Выведите это из универсального свойства тензорного произведения.

7.2. Точность функтора Hom

Задача 7.11. Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. Докажите, что

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

точна, для любого R-модуля N.

Задача 7.12 (*). Пусть R – кольцо, конечномерное над полем ("артиново", в терминологии листка 6), а $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность. Всегда ли $\operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ – наложение? А если R полупросто?

Задача 7.13. Пусть $R = \mathbb{Z}$. Приведите пример вложения R-модулей $M_1 \longrightarrow M_2$, таких, что $\operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ – не наложение для какого-то N.

Определение 7.5. **Точный функтор** F есть функтор на категории R-модулей, переводящий любую точную последовательность в точную.

Определение 7.6. Модуль N над R называется **инъективным**, если функтор $M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N)$ точен.

Задача 7.14 (*). Вложите $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в инъективный $\mathbb{Z}$-модуль.

Задача 7.15. Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – точная последовательность R-модулей. Докажите, что

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$$

точна, для любого R-модуля N.

Задача 7.16. Пусть $R = \mathbb{Z}$. Приведите пример эпиморфизма R-модулей $M_2 \longrightarrow M_3$, такого, что $\operatorname{Hom}_R(N, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$ не наложение для какого-то N.

Определение 7.7. Модуль N над R называется **проективным**, если функтор $M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M)$ точен.

Задача 7.17 (!). Докажите, что конечно-порожденный R-модуль N проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым R^n.

Указание. Рассмотрите наложение $\operatorname{Hom}_R(N, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$ где $M_3 = N$, а M_2 – свободный модуль, сюрьективно отображающийся на N.

Задача 7.18 (*). Пусть над кольцом R любой модуль проективен. Верно ли, что R – прямая сумма полей?

7.3. Точность тензорного произведения

Задача 7.19. Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. Докажите, что для любых R-модулей N, N', последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\operatorname{Hom}_R(N', \operatorname{Hom}_R(M_3, N)) \\ &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N', \operatorname{Hom}_R(M_2, N)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N', \operatorname{Hom}_R(M_1 N)), \end{aligned}$$

точна.

Указание. Примените свойства точности Hom_R (сначала одно, потом другое).

Задача 7.20. Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. Докажите, что для любых R-модулей N, N', последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3 \otimes N', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2 \otimes N', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1 \otimes N', N)$$

точна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 7.8. **Комплекс** R-модулей есть последовательность вида

$$M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} M_3 \xrightarrow{d_3} ...$$

такая, что $d_i \circ d_{i+1} = 0$. **Когомологии** комплекса суть группы $\frac{\ker(d_{i+1})}{\operatorname{im} d_i}$. Комплекс **точен**, если у него нулевые когомологии.

Задача 7.21. Пусть E есть $M_1 \xrightarrow{\mu} M_2 \xrightarrow{\rho} M_3 \longrightarrow 0$ – комплекс R-модулей, такой, что

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\rho_N} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\mu_N} \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

точно для любого R-модуля N. Докажите, что E тоже точен.

Указание. Воспользуйтесь инъективностью ρ_N, чтобы доказать сюрьективность ρ, положив $N := M_3 / \operatorname{im} \rho$. Докажите точность во втором члене, воспользовавшись точностью $\operatorname{Hom}_R(E, N)$ в члене M_2, и выбрав $N = M_2 / \operatorname{im} \mu$.

Задача 7.22 (*). Пусть $E = \left(M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} M_3 \longrightarrow ... \right)$ есть комплекс R-модулей, такой, что

$$... \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

точен для любого N. Докажите, что E точен.

Задача 7.23 (!). Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. Докажите, что последовательность

$$M_1 \otimes_R M \longrightarrow M_2 \otimes_R M \longrightarrow M_3 \otimes_R M \longrightarrow 0$$

всегда точна.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.21, и примените точность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3 \otimes M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2 \otimes M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes M, N)$$

Задача 7.24. В ситуации предыдущей задачи, приведите пример, когда $M_1 \otimes_R M \longrightarrow M_2 \otimes_R M$ – не вложение.

Определение 7.9. R-модуль N называется **плоским**, если функтор $M \longrightarrow M \otimes_R N$ точен.

Задача 7.25 (*). Пусть R – кольцо, не являющееся прямой суммой полей. Всегда ли над R найдется неплоский модуль?

Задача 7.26 (!). Пусть $I \subset R$ – идеал. Докажите, что для любого R-модуля, $M \otimes_R (R/I) \cong M/IM$.

Указание. Воспользуйтесь точной последовательностью $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ и тензорно домножьте ее на M.

Задача 7.27. Пусть I, I' – разные максимальные идеалы в конечно-порожденном кольце R. Докажите, что $R/I \otimes_R R/I' = 0$.

Указание. Убедитесь, что $R/I \otimes_R R/I'$ есть фактор $R \otimes_R R = R$ по идеалу, содержащему I и I'.

Задача 7.28 (*). Пусть $R^n \longrightarrow R^m$ – сюрьективный гомоморфизм R-модулей. Докажите, что $m \leqslant n$.

Задача 7.29 (*). Пусть $R^n \longrightarrow R^m$ – инъективный гомоморфизм R-модулей, причем R – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$. Докажите, что $n \leqslant m$.

Задача 7.30 (**). Пусть $R^n \longrightarrow R^m$ – инъективный гомоморфизм R-модулей, причем R – не обязательно конечно-порожденное. Верно ли, что всегда $n \leqslant m$?