Алгебраическая геометрия 8: тензорные произведения колец

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

8.1. Тензорные произведения колец

Задача 8.1. Пусть A, B – кольца, а $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B$ гомоморфизмы. Рассмотрим A и B как C-модули, и пусть $A \otimes_C B$ – тензорное произведение этих C-модулей над C. Докажите, что на $A \otimes_C B$ существует и единственна структура кольца, такая, что $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = aa' \otimes bb'$.

Задача 8.2. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ нулевое.

Задача 8.3. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ нулевое.

Задача 8.4. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}[t]} (\mathbb{C}[t]/(t-1))$ нулевое.

Задача 8.5 (*). Пусть $\mathbb{C}[[t]]$ – кольцо формальных рядов, а C, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$, причем $C \subset \mathbb{C}[[t]]$, а гомоморфизм $C \longrightarrow B$ сюрьективен. Предположим, что $R := \mathbb{C}[[t]] \otimes B$ конечно порождено. Докажите, что R конечномерно над $\mathbb{C}$.

Задача 8.6. Докажите, что $\mathbb{C}[t_1, ..., t_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_1, ..., z_n] = \mathbb{C}[t_1, ..., t_k, z_1, ..., z_n]$.

Задача 8.7 (!). Докажите следующую версию теоремы Гильберта о нулях. Пусть $I \subset A$ – идеал в конечно-порожденном кольце над $\mathbb{C}$ без делителей нуля, $X = \operatorname{Spec} A$ ее максимальный спектр, $Z \subset X$ – множество общих нулей I, а I_Z – идеал всех функций, которые зануляются в Z. Тогда $\mathcal{O}_Z := A/I_Z = (A/I)/N$, где N есть нильрадикал A/I.

Задача 8.8. Пусть A, B – кольца, а $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B$ гомоморфизмы. Предположим, что $C \longrightarrow B$ – эпиморфизм. Постройте естественный эпиморфизм $A \longrightarrow A \otimes_C B$.

Задача 8.9 (!). Пусть $\phi: \ X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, а $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал точки $y \in Y$ в $\mathcal{O}_Y$. Рассмотрим кольцо $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y / \mathfrak{m})$. Докажите, что максимальные идеалы R находятся в биективном соответствии с точками $\phi^{-1}(y)$.

Указание. Обозначим за $\phi^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ естественный гомоморфизм. Примените изоморфизм $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y / \mathfrak{m}) = \mathcal{O}_X / \phi^* \mathfrak{m}\, \mathcal{O}_X$, чтобы убедиться, что при эпиморфизме $\mathcal{O}_X \longrightarrow R$, максимальные идеалы R соответствуют максимальным идеалам $I \in \mathcal{O}_X$, содержащим $\phi^* \mathfrak{m}$.

Задача 8.10 (!). В условиях предыдущей задачи, обозначим за $\mathfrak{n}$ нильрадикал R. Докажите, что $R/\mathfrak{n}$ есть кольцо регулярных функций на $\phi^{-1}(y)$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гильберта о нулях.

Задача 8.11. В условиях предыдущей задачи, пусть $X = Y = \mathbb{C}$, морфизм $f : X \longrightarrow Y$ задан формулой $t \longrightarrow t^2$, а $y = 0 \in Y$. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y / \mathfrak{m}_y)$ изоморфно $\mathbb{C}[t]/t^2$.

Задача 8.12 (*). Пусть $\phi : X \longrightarrow Y$ – морфизм гладких аффинных многообразий, а $y \in Y$ точка, такая, что для любого $x \in f^{-1}(y)$, дифференциал $Df : T_x X \longrightarrow T_y Y$ – эпиморфизм.[1] Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y / \mathfrak{m}_y)$ не содержит нильпотентов.

8.2. Произведения многообразий

Задача 8.13. Пусть A, B, C – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$. Докажите, что кольцо $A \otimes_C B$ конечно-порождено.

Задача 8.14. Пусть $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B$ – гомоморфизмы колец, а $I \subset B$ – идеал. Обозначим за $1 \otimes I$ идеал в $A \otimes_C B$, порожденный элементами вида $a \otimes b$, где $a \in A, b \in I$. Докажите, что $A \otimes_C (B/I) = A \otimes_C B/(1 \otimes I)$.

Указание. Воспользуйтесь $M \otimes_R (R/I) = M/IM$.

Задача 8.15. Пусть $A_1 = A/I$, $B_1 = B/J$, где A, B – кольца над $\mathbb{C}$, а I, J – идеалы. Докажите, что $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} B_1 = A \otimes_{\mathbb{C}} B/(I \otimes 1 + 1 \otimes J)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей (дважды).

Задача 8.16. Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$,
$\operatorname{Spec} A = X$, $\operatorname{Spec} B = Y$, а N – нильрадикал $A \otimes_{\mathbb{C}} B$. Докажите, что $\operatorname{Spec}((A \otimes_{\mathbb{C}} B)/N) = X \times Y$.

Указание. Пусть $A = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$, $B = \mathbb{C}[t_1, ..., t_k]/J$. Проверьте, что $X \times Y$ есть множество общих нулей идеала $I \otimes 1 + 1 \otimes J$, и воспользуйтесь теоремой Гильберта о нулях.

Задача 8.17 (*). Пусть A, B – кольца без делителей нуля над $\mathbb{C}$. Верно ли, что $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ всегда не содержит делителей нуля?

[1] В дифференциальной топологии, такая точка называется **регулярным значением** f.

Задача 8.18 (*). Пусть A, B – кольца без делителей нуля над полем k характеристики p. Приведите пример, когда $A \otimes_k B$ содержит нетривиальные нильпотенты.

Задача 8.19. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$. Докажите, что пересечение всех максимальных идеалов A есть его нильрадикал.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гильберта о нулях.

Определение 8.1. Кольцо R называется **кольцом Джекобсона**, если каждый простой идеал в R есть пересечение максимальных.

Задача 8.20 (*). Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$. Докажите, что A – кольцо Джекобсона.

Задача 8.21. Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов,
$A = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$, $B = \mathbb{C}[t_1, ..., t_k]/J$. Докажите, что пересечение всех максимальных идеалов $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n, t_1, ..., t_k]$, содержащих $I \otimes 1 + 1 \otimes J$, равно $I \otimes 1 + 1 \otimes J$

Задача 8.22 (!). Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов, а $R := A \otimes_{\mathbb{C}} B$ – их произведение. Докажите, что в R нет нильпотентов.

Указание. Убедитесь, что $A \otimes_{\mathbb{C}} B = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n, t_1, ..., t_k]/I \otimes 1 + 1 \otimes J$, и примените задачу 8.19, чтобы убедиться, что нильрадикал $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ пуст.

8.3. Простые идеалы в артиновых кольцах

Определение 8.2. Кольцо над полем (ассоциативное, коммутативное, но не обязательно с единицей) будем называть **коммутативной алгеброй**.

Определение 8.3. Идемпотент в алгебре есть элемент a такой, что $a^2 = a$.

Определение 8.4. Артиново кольцо над полем k есть кольцо (с единицей), которое конечномерно над k.

Задача 8.23. Пусть A – коммутативная алгебра, в которой нет ненулевых идемпотентов, и конечномерная над полем. Докажите, что все элементы A – нильпотенты.

Задача 8.24 (!). Пусть A – конечномерная коммутативная алгебра без делителей нуля. Докажите, что A это поле.

Задача 8.25. Пусть A есть кольцо, конечномерное над полем, и без нильпотентов. Докажите, что A есть прямая сумма полей.

Задача 8.26. Пусть A есть прямая сумма полей, $A = \bigoplus_i k_i$. Докажите, что разложение $A = \bigoplus_i k_i$ определено однозначно, с точностью до перестановки слагаемых.

Задача 8.27 (!). Пусть A – артиново кольцо над полем. Докажите, что число простых идеалов A конечно.

Задача 8.28. Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей характеристики 0. Докажите, что $K \otimes_k \bar{k}$ изоморфно прямой сумме нескольких копий $\bar{k}$, где $\bar{k}$ есть алгебраическое замыкание k.

Задача 8.29. Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей характеристики 0. Докажите, что существует лишь конечное число промежуточных полей $K \supset K' \supset k$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.30 (!). ("теорема о примитивном элементе"). Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей характеристики 0. Докажите, что найдется элемент $x \in K$ такой, что линейные комбинации x^i с коэффициентами из k порождают K.

Указание. Докажите, что векторное пространство нельзя представить как объединение конечного набора подпространств положительной коразмерности, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

8.4. Конечные морфизмы

Задача 8.31. Пусть M – конечно-порожденный R-модуль, а $R \longrightarrow R'$ – гомоморфизм колец. Докажите, что $M \otimes_R R'$ – конечно-порожденный R'-модуль.

Определение 8.5. Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий. Этот морфизм называется **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль.

Задача 8.32 (!). Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – конечный морфизм. Докажите, что для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(R)$, где
$R = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y / \mathfrak{m}_y)$, и убедитесь, что R конечномерно над $\mathbb{C}$.

Задача 8.33. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $x^2 = y^3$, а $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow Z$ задается $t \longrightarrow (t^3, t^2)$. Докажите, что ϕ конечно.

Задача 8.34 (!). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $xy = 1$, а $\pi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекция, заданная формулой ниже. Будет ли $\pi : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ конечно?

а. $\pi(x,y) = x$

б. $\pi(x,y) = x + y$

Задача 8.35 (!). Пусть $X \xrightarrow{\phi} Y$ – сюрьективный морфизм аффинных многообразий, такой, что прообраз точки – всегда конечное множество. Всегда ли ϕ конечный?