Алгебраическая геометрия 9: поля частных и целые замыкания

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

9.1. Топология Зариского

Определение 9.1. Топология Зариского на квазиаффинном многообразии есть топология, в которой замкнутыми являются подмногообразия, заданные системой полиномиальных уравнений. **Замыкание по Зарискому** подмножества $Z \subset M$ есть пересечение всех замкнутых по Зарискому подмножеств, содержащих Z.

Задача 9.1. Проверьте, что это действительно топология.

Задача 9.2. Пусть $A = \mathbb{C}^1$. Докажите, что топология Зариского на A нехаусдорфова. Докажите, что A компактно в топологии Зариского.

Задача 9.3 (*). Пусть A – аффинное многообразие с бесконечным множеством точек. Докажите, что топология Зариского всегда нехаусдорфова.

Задача 9.4. Пусть A – аффинное многообразие, Докажите, что в $\mathcal{O}_A$ есть идемпотенты тогда и только тогда, когда A не связно в топологии Зариского.

Задача 9.5 (*). Пусть A – аффинное многообразие. Докажите, что A компактно в топологии Зариского.

Замечание. Мы определили топологию Зариского на множестве точек многообразия A, то есть на множестве максимальных идеалов $\mathcal{O}_A$ (так ее определял сам Зариский). Довольно часто топологию Зариского определяют на множестве $\operatorname{Spec}_{pr}(\mathcal{O}_A)$ всех простых идеалов $\mathcal{O}_A$; замкнутые множества Z_I в этой топологии соответствуют идеалам $I \subset \mathcal{O}_A$, а простой идеал $\mathfrak{p}$ лежит в замкнутом множестве Z_I, если он содержит I.

Задача 9.6 (**). Будет ли пространство $\operatorname{Spec}_{pr}(\mathcal{O}_A)$ с топологией Зариского компактно, для любого аффинного многообразия? А для любого кольца?

Задача 9.7. Пусть кольцо R нетерово. Докажите, что каждое открытое по Зарискому подмножество в $\operatorname{Spec}_{pr}(R)$ представляется в виде конечного объединения открытых множеств вида $D_f := \operatorname{Spec}_{pr}(R)\backslash Z_{(f)}$, где $f \in R$, а (f) обозначает соответствующий главный идеал.

Задача 9.8 (!). Пусть каждое открытое по Зарискому подмножество $\operatorname{Spec}_{pr}(R)$ представляется в виде конечного объединения открытых множеств вида $D_f = \operatorname{Spec}_{pr}(R)\backslash Z_{(f)}$. Следует ли из этого, что R нетерово?

9.2. Поле частных и бирациональные морфизмы

Определение 9.2. Пусть $S \subset R$ – подмножество кольца R, замкнутое относительно умножения, и не содержащее 0. **Локализацией** кольца R по S называется кольцо, формально порожденное элементами вида a/F, где $a \in R$, $F \in S$ и с соотношениями $a/F \cdot b/G = ab/FG$, $a/F + b/G = \frac{aG+bF}{FG}$ и $aF^k/F^{k+n} = a/F^n$.

Определение 9.3. Пусть R – кольцо без делителей нуля, а S – множество всех ненулевых элементов R. **Поле частных** R есть локализация R по S.

Задача 9.9. Докажите, что локализация кольца без делителей нуля по множеству всех ненулевых элементов – поле.

Задача 9.10. Пусть A – неприводимое аффинное многообразие, не изоморфное точке, а $k(A)$ – поле частных его кольца регулярных функций. Докажите, что $k(A)$ несчетномерно над $\mathbb{C}$.

Определение 9.4. Доминантный морфизм есть морфизм $f: X \longrightarrow Y$, такой, что Y есть замыкание $f(X)$ по Зарискому.

Задача 9.11. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – доминантный морфизм, где X неприводимо. Докажите, что Y тоже неприводимо. Постройте гомоморфизм полей частных $k(Y) \longrightarrow k(X)$, продолжающий $f^*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$.

Определение 9.5. Доминантный морфизм неприводимых многообразий называется **бирациональным**, если соответствующий гомоморфизм полей частных – изоморфизм.

Задача 9.12. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – бирациональный морфизм. Докажите, что найдется такое $F \in \mathcal{O}_Y$, что для любого $a \in \mathcal{O}_X$, существует $b \in \mathcal{O}_Y$ такой, что $a = f^*\left(\frac{b}{F^k}\right)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\mathcal{O}_X$ – конечно-порожденное кольцо.

Задача 9.13 (!). Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – бирациональный морфизм. Докажите, что существует замкнутое по Зарискому подмножество $Z \subset Y$ такое, что $f : (X \backslash f^{-1}(Z)) \longrightarrow Y \backslash Z$ – изоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.14. Пусть $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ – отображение, заданное формулой $(x, y) \longrightarrow (x^2, y^2, xy)$. Докажите, что оно переводит $\mathbb{C}^2$ в гиперповерхность $Z \subset \mathbb{C}^3$, заданную уравнением $t_1 t_2 = t_3^2$.

а. Будет ли $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow Z$ бирационально?

б. [*] Будет ли оно конечно?

в. [**] Изоморфны ли поля $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ и $k(Z)$?

Задача 9.15. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ кривую Z, заданную уравнением $xy = 1$, и пусть $\pi(x, y) = x$. Будет ли отображение $\pi : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ бирационально?

Задача 9.16. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Постройте бирациональный морфизм из Z в $\mathbb{C}$.

Задача 9.17. Пусть $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ – морфизм, заданный формулой $F(x, y, z) = (xy, xz, xyz)$. Докажите, что F бирационален.

Задача 9.18 (*). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $x^2 = y^3$. Постройте бирациональный морфизм $Z \longrightarrow Z$, который не является изоморфизмом, или докажите, что таких морфизмов нет.

Задача 9.19 (*). Пусть F – конечное расширение $\mathbb{C}(t_1, ..., t_k)$, а F' – конечное расширение $\mathbb{C}(z_1, ..., z_{k'})$, причем F изоморфно F'. Докажите, что $k = k'$.

9.3. Целая зависимость

Определение 9.6. Пусть $A \subset B$ – кольца. Элемент $b \in B$ называется **целым над** A, если подкольцо $A[b] = A \cdot \langle 1, b, b^2, b^3, ...\rangle$, порожденное b и A, конечно порождено как A-модуль.

Определение 9.7. Полином называется **нормированным**, или **унитарным** (monic polynomial), если его старший коэффициент равен 1.

Задача 9.20. Докажите, что $x \in B$ цел над $A \subset B$ тогда и только тогда, когда цепочка A-подмодулей

$$A \subset A \cdot \langle 1, x\rangle \subset A \cdot \langle 1, x, x^2\rangle \subset A \cdot \langle 1, x, x^2, x^3\rangle \subset ...$$

обрывается.

Задача 9.21 (!). Докажите, что $x \in B$ цел над $A \subset B$ тогда и только тогда, когда x является корнем унитарного полинома с коэффициентами из A.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.22. Докажите, что $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ цел над $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Задача 9.23. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $x^2 = y^3$. Докажите, что $x/y \in k(\mathcal{O}_Z)$ цело над $\mathcal{O}_Z$.

Задача 9.24 (*). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – кривая, заданная уравнением $x^a = y^b$, $a < b$. Найдите все c, d, для которых $x^c/y^d \in k(\mathcal{O}_Z)$ цело над $\mathcal{O}_Z$.

Замечание. Отныне и до конца этого листка, **все кольца предполагаются нетеровыми и без делителей нуля.**

Задача 9.25. Пусть $x, y \in B \supset A$, причем y цело над $A[x]$. Следует ли из этого, что y цело над A?

Задача 9.26. Пусть $x, y \in B \supset A$, – элементы, целые над кольцом A. Докажите, что y цело над $A[x]$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.21.

Задача 9.27 (!). Пусть $x, y \in B \supset A$, – элементы, целые над A. Докажите, что $x + y$ и xy целы над A.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.28 (!). Пусть G – конечная группа, действующая на конечно-порожденном кольце R автоморфизмами. Докажите, что все элементы R целы над R^G.

Указание. Для заданного $f \in R$, рассмотрите многочлен $\prod_{g\in G}(t - g(f)) \in R[t]$, и докажите, что его коэффициенты лежат в R^G.

9.4. Целое замыкание

Задача 9.29. Пусть $A \subset B$ – кольца, а $N(A) \subset B$ – множество всех элементов, целых над A. Докажите, что это подкольцо.

Определение 9.8. Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B, целых над A, называется **целым замыканием** A **в** B. Множество всех элементов поля частных A, целых над A, называется **целым замыканием** A. Кольцо $A \subset B$ называется **целозамкнутым в** B**,** если оно совпадает со своим целым замыканием в B, и **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $k(A)$.

Определение 9.9. Неприводимое аффинное многообразие X называется **нормальным**, если его кольцо функций $\mathcal{O}_X$ целозамкнуто.

Задача 9.30. Пусть $A \subset B \subset C$ – кольца, такие, что B конечно порождено как A-модуль, а C – конечно-порождено как B-модуль. Докажите, что C конечно порождено как A-модуль.

Задача 9.31. Пусть $A \subset B$, $x \in B$ целый над A, а $y \in B$ целый над $A[x]$. Докажите, что y целый над A.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.32 (!). Докажите, что целое замыкание кольца $A \subset B$ целозамкнуто в B.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.33. Пусть $u, v \in A$, а $u/v \in k(A)$ – корень унитарного многочлена степени n. Докажите, что u^n делится на v в A.

Определение 9.10. Кольцо называется **факториальным**, если в нем имеет место однозначность разложения на простые сомножители.

Задача 9.34 (!). Пусть кольцо A факториально. Докажите, что оно целозамкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.35. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ целозамкнуто.

Задача 9.36. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ целозамкнуто.

Задача 9.37. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не целозамкнуто.

Задача 9.38. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ целозамкнуто.

9.5. Факториальность кольца полиномов

Определение 9.11. Полином $P(t) \in A[t]$ над факториальным кольцом A называется **примитивным**, если наибольший общий делитель его коэффициентов равен 1.

Задача 9.39. Пусть $P(t), Q(t)$ – полиномы над факториальным кольцом, причем не все коэффициенты $P(t)$ и $Q(t)$ делятся на простой элемент $p \in A$. Докажите, что $P(t)Q(t) \neq 0$ по модулю p.

Задача 9.40 (!). ("лемма Гаусса") Пусть A– факториальное кольцо, а $P(t)$, $Q(t) \in A[t]$ – примитивные полиномы. Докажите, что полином $P(t)Q(t)$ примитивен.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.41 (!). Пусть A – факториальное кольцо, а $P(t) \in A[t]$ – неприводимый полином. Докажите, что $P(t)$ неприводим над полем частных $k(A)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.42. Докажите, что $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ факториально.