Теория Мори, осень 2011: задачи для экзамена

Чтобы получить зачет по разделу, надо решить не меньше половины задач (по сумме баллов). Оценка экзамена вычисляется по формуле $5 - k$, где k – число несданных разделов. Сдавать задачи устно, но иметь с собой все решения (по всем подлежащим сдаче разделам) в записанном виде, быть готовым отвечать на вопросы.

1.1. Бирациональные отображения (9 баллов)

Определение 1.1. Дивизор Картье называется **неф** (численно эффективным), если его ограничение на любую кривую неотрицательно. Неф-дивизор L называется **объемным** (big), если старшая степень его класса когомологий положительна.

Задача 1.1. Пусть X – раздутие $\mathbb{C}P^2$ в 9 точках общего положения.

а. Докажите, что $-K_X$ неф, но не обилен.

б. Докажите, что $-K_X$ эффективен (то есть у этого расслоения есть голоморфное сечение).

в. Пусть D – дивизор нулей этого сечения. Докажите, что D – неприводимая кривая. Докажите, что D в X **жестко**, то есть не имеет никаких деформаций.

Задача 1.2. В условиях предыдущей задачи, докажите, что в X есть бесконечно много исключительных кривых, а эффективный конус $\overline{NE}(X)$ не полиэдральный.

Задача 1.3. Пусть C – неприводимая кривая на гладкой поверхности X, а $C^2 \leqslant 0$. Докажите, что C находится на границе $\overline{NE}(X)$.

Определение 1.2. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ гладкое разрешение особого многообразия Y, а $E_1, ..., E_n$ – исключительные дивизоры. Предположим, что относительный канонический класс $K_{X/Y} := K_X \otimes f^* K_Y^{-1}$ записывается как $K_{X/Y} = \sum a_i E_i$. Определим **дискрепатность** $\operatorname{discr}(Y)$ как $\inf_X a_i$, где инфимум берется по всем разрешениям.

Задача 1.4. Докажите, что $-1 \leqslant \operatorname{discr}(Y) \leqslant 1$, либо $\operatorname{discr}(Y) = -\infty$.

Задача 1.5. Найдите проективное многообразие Y, для которого $\operatorname{discr}(Y) = -\infty$.

Определение 1.3. Пусть канонический класс Y – $\mathbb{Q}$-Картье. Многообразие Y имеет **терминальные особенности**, если $\operatorname{discr}(Y) > 0$, и **канонические особенности**, если $\operatorname{discr}(Y) \geqslant 0$.

Задача 1.6. Докажите, что многообразие с терминальными особенностями неособо в коразмерности 2.

Задача 1.7 (2 балла). Пусть X – гладкая, нормальная поверхность с каноническими особенностями. Докажите, что в окрестности каждой особенности X изоморфна фактору $\mathbb{C}^2/\Gamma$, где Γ – конечная подгруппа в $SU(2)$

Задача 1.8. Пусть $\phi: X \longrightarrow Y$ – бирациональный рациональный морфизм гладких проективных многообразий, E_X – исключительное множество ϕ, а E_Y – исключительное множество ϕ^{-1}. Может ли случиться такое, что $\operatorname{codim} E_X \geqslant 2$ и $\operatorname{codim} E_Y \geqslant 2$?

1.2. Кривые на многообразиях (8.5 баллов)

Задача 1.9 (0.5 баллов). Докажите, что любой когерентный пучок без кручения над $\mathbb{C}P^1$ изоморфен прямой сумме линейных расслоений.

Определение 1.4. Расслоение над $\mathbb{C}P^1$ называется **обильным** (**неф**), если оно изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}(n_i)$, где все $n_i > 0$ ($n_i \geqslant 0$ для неф).

Задача 1.10. Докажите, что расслоение E над $\mathbb{C}P^1$ обильно тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ (относительный $\mathcal{O}(1)$ на проективизации E) – обильное линейное расслоение.

Замечание. Векторное расслоение E над произвольной базой называется **обильным**, если $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ обильно.

Определение 1.5. Рациональная кривая на многообразии X называется **обильной**, если ограничение $TX\big|_C$ обильно, и **свободной**, если оно неф.

Задача 1.11. Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкая квадрика. Докажите, что любая гладкая рациональная кривая на X свободна.

Задача 1.12 (3 балла). Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкая гиперповерхность степени $3 \leqslant d \leqslant 2n-3$. Докажите, что X содержит несвободную рациональную кривую.

Задача 1.13. Пусть X_k – проективное многообразие над полем k, $[K : k]$ конечное расширение полей, - соответствующее многообразие над K, $D_k \subset X_k$ дивизор, а $D_K \subset X_K$ его расширение. Докажите, что D_k неф $\Leftrightarrow$ D_K неф.

Задача 1.14 (2 балла). Пусть M – гладкая проективная поверхность, причем $-K_M$ – неф. Докажите, что конус $\overline{NE}(M)$ порожден рациональными кривыми с квадратом $\geqslant -2$.

1.3. Деформации кривых (10 баллов)

Задача 1.15. Пусть C – гладкая кривая в $\mathbb{C}P^n$, причем нормальное расслоение к C обильно, а любая малая деформация C получена из C действием автоморфизма $\mathbb{C}P^n$. Докажите, что C – рациональная кривая степени не больше 3.

Задача 1.16. Пусть C – свободная рациональная кривая на проективном многообразии X. Докажите, что через любую точку X проходит деформация C.

Задача 1.17. Пусть C – обильная рациональная кривая на многообразии X Докажите, что через любые две точки X проходит деформация C.

Задача 1.18 (2 балла). Пусть $C_1, ..., C_n$ – обильные рациональные кривые на проективном многообразии. Докажите, что объединение $\bigcup_i C_i$ имеет гладкую деформацию, которая обильна.

Задача 1.19 (3 балла). Пусть X – гладкое проективное многообразие, допускающее обильную рациональную кривую. Докажите, что $\pi_1(X)$ конечна.

Задача 1.20 (2 балла). Пусть – проективное, гладкое многообразие без рациональных кривых, а $f : C \longrightarrow X$ – какая-то кривая. Докажите, что пространство $Hom(C, X)$ модулей отображения C в X удовлетворяет $\dim Hom(C, X) \leqslant \dim X$. Приведите пример, когда равенство реализуется для $\dim X = 3$.

1.4. Мультипликаторные идеалы и теоремы о занулении когомологий (7 баллов)

Задача 1.21. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – морфизм гладких многообразий, общий слой которого есть $\mathbb{C}P^1$. Докажите, что $R^i f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ для $i > 0$.

Определение 1.6. Многообразие Y имеет **лог-терминальные особенности**, если $\mathsf{discr}(Y) > -1$.

Определение 1.7. Многообразие Y имеет **рациональные особенности**, если для какого-то разрешения $f: X \longrightarrow Y$, имеем $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0$.

Задача 1.22. Докажите, что зануление $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$ не зависит от выбора разрешения $f: X \longrightarrow Y$. Докажите, что лог-терминальные особенности рациональны.

Задача 1.23. Пусть $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ – разветвленное накрытие с циклической группой монодромии, причем $\tilde{X}$ и X гладкие и проективные. Пусть L – неф расслоение на X, такое, что $\pi^* L \otimes K_{\tilde{X}}$ неф и объемный. Докажите, что $H^i(L) = 0$ для любого $i > 0$.

Определение 1.8. **Лог-пара** на нормальном многообразии X есть такой $\mathbb{R}$-дивизор Вейля Δ, что $K_X + \Delta$ есть $\mathbb{R}$-дивизор Картье.

Определение 1.9. Рассмотрим лог-пару (X, Δ), где X гладко, а $\Delta = \sum \alpha_i D_i$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями. Зададим дивизоры D_i локально уравнениями $f_i = 0$ с простыми нулями, и пусть $\psi := \prod_i f_i^{-\alpha_i}$, а $J(K_X)$ – пучок сечений $v \in K_X$ таких, что $|\psi|^2 v \wedge \bar{v}$ локально интегрируемо на X. **Мультипликаторный идеал** лог-пары (X, Δ) есть $J(X, \Delta) := J(K_X) \otimes K_X^{-1}$. Для негладкого X, возьмем его разрешение, мультипликаторный идеал разрешения, и прямой образ этого идеала даст $J(X, \Delta) \subset \mathcal{O}_X$.

Определение 1.10. Лог-пара (X, Δ) называется **klt** (Kawamata log-terminal), если $J(X, \Delta) = \mathcal{O}_X$, и **лог-канонической**, если $J(X, \alpha\Delta) = \mathcal{O}_X$ для любого $0 < \alpha < 1$.

Задача 1.24 (2 балла). Пусть $G \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ есть конечная группа, действующая на $\mathbb{C}P^2$ без неподвижных точек, а D – G-инвариантный, эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор степени < 2. Докажите, что (X, Δ) – klt.

Задача 1.25. Пусть $p: X \longrightarrow Y$ – конечный, доминантный морфизм нормальных проективных многообразий, (Y, D_Y) – лог-пара, а D_X – дивизор на X, определенный из формулы $p^*(D_Y + K_Y) = K_X + D_X$. Докажите, что (X, D_X) klt $\Leftrightarrow$ (Y, D_Y) klt.

Определение 1.11. Пусть D – дивизор, заданный уравнением $f = 0$, с простыми нулями в общей точке. **Кратность** дивизора в точке $x \in X$ есть максимальное r такое, что $f \in \mathfrak{m}_x^r$, где $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал точки.

Задача 1.26. Пусть D – эффективный дивизор на гладком многообразии X, кратность которого в каждой точке $\leqslant m$. Докажите, что $(X, m^{-1}D)$ лог-каноничен.