Алгебраическая геометрия, письменное задание 1: кольца, идеалы, алгебраические отображения

Число очков за это задание вычисляется по формуле $\frac{3}{2}s - \max(s-6, 0)$, где s – сумма баллов за задачи. Можно ссылаться на теоремы из сданного студентом курса алгебры для ВШЭ, но нужно привести точную формулировку теоремы, и сказать, какой именно курс ее содержал. Кроме того, студент, ссылающийся на какую-то теорему. берет на себя обязанность рассказать ее доказательство, по первому требованию.

Решение письменное, сдается до 24:00 пятницы, 2-го сентября (можно положить на стол рядом с комнатой 210). Через неделю будет обсуждение задач, пожалуйста, будьте готовы рассказать то, что вы нарешали.

Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю, во избежание пересдач и других эксцессов.

Задача 1.1 (2 балла). Пусть M – компактное топологическое пространство, $C^0(M)$ – кольцо вещественнозначных непрерывных функций, а I – максимальный идеал в $C^0(M)$. Докажите, что $I = I_x$ для какого-то $x \in M$, где I_x – идеал всех функций, зануляющихся в x.

Задача 1.2 (2 балла). Пусть $M = \mathbb{R}$. Постройте в $C^0(M)$ максимальный идеал, который не имеет такого вида.

Задача 1.3 (2 балла). Пусть M – топологическое пространство $\mathfrak{S}$ – множество всех максимальных идеалов в $C^0(M)$. Для функции $f \in C^0(M)$, обозначим за $U_f \subset \mathfrak{S}$ подмножество в $\mathfrak{S}(M)$, состоящее из всех идеалов, не содержащих f. Рассмотрим топологию, открытыми множествами которой являются U_f и их объединения (такая топология называется **топологией Зариского**). Докажите, что $\mathfrak{S}(M)$ компактно.

Задача 1.4 (5 баллов). Пусть $M = \mathbb{R}$. Будет ли $\mathfrak{S}(M)$ хаусдорфово?

Задача 1.5 (3 балла). Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество, а $f = e^{z_1}$ экспонента от координаты z_1. Докажите, что если f алгебраична на A, то она постоянна на каждой компоненте линейной связности.

Задача 1.6 (3 балла). Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество, а $f = \log(z_1)$ – одна из ветвей логарифма координаты z_1. Докажите, что если f алгебраична на A, то она постоянна на каждой компоненте линейной связности.

Задача 1.7 (1 балл). Пусть R – кольцо, которое не содержит нильпотентов. Докажите, что пересечение всех простых идеалов R равно нулю.

Задача 1.8 (2 балла). Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – дискретное подмножество, которое алгебраично. Докажите, что оно конечно.

Задача 1.9 (1 балл). Пусть задан морфизм аффинных подмногообразий в $\mathbb{C}^n$, который определяет гомеоморфизм. Всегда ли он обратим?

Определение 1.1. Главный идеал есть идеал, порожденный одним элементом.

Задача 1.10 (3 балла). Пусть R – кольцо функций на окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, полученных ограничением вещественных полиномиальных функций на $\mathbb{R}^2$. Все ли идеалы в $\mathbb{R}$ главные?