Алгебраическая геометрия, экзамен (осенний семестр, 2011)

Каждому студенту выдается по 8 задач (по 2 из каждого раздела, случайно). Надо решить из них 5. Оценка за экзамен вычисляется по формуле $b = \min(6s, 30)$, где s – число сданных задач. Можно пользоваться литературой, в том числе материалами курса, но надо владеть доказательством всех используемых результатов, и уметь его рассказать по требованию экзаминатора. Все кольца предполагаются конечно-порожденными и над $\mathbb{C}$, если не оговорено противного. Для сдавших первый модуль, зачет за курс (и за второй модуль) ставится студентам, получившим за семестр (листочки, контрольные, экзамен) суммарно 90 баллов. **Прошу прислать мне отсканированные ведомости за листки 4-6, 7-9, 10-11 емэйлом до 28-го декабря**, на адрес `verbit[at]verbit.ru`. Отметьте, сколько вам баллов причитается, по вашему мнению, за каждый из листков. Если вы пересдавали первый модуль, пришлите также скан ведомости за листки 1-3.

1.1. Аффинные многообразия и теорема Гильберта о нулях

Задача 1.1. Пусть $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ – идеал, такой, что множество общих нулей I конечно. Докажите, что $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$ конечномерно над $\mathbb{C}$.

Задача 1.2. Пусть $P(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}[t_1, ..., t_n]$. Докажите, что у уравнения $P(t_1, ..., t_n) = 0$ есть решения в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда в кольце $A := \mathbb{R}[t_1, ..., t_n]/(P)$ есть максимальный идеал I такой, что A/I изоморфно $\mathbb{R}$.

Задача 1.3. Пусть $A = \mathbb{R}[t]$, а X – его максимальный спектр, наделенный топологией Зариского. Постройте гомеоморфизм между X и максимальным спектром $\mathbb{C}[t]$.

Задача 1.4. Докажите, что для любого $d \in \mathbb{Z}^{>0}$, найдется неприводимый полином степени d $P \in \mathbb{C}[x, y]$, такой, что $P(x, y) = 0$ задает гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$.

Задача 1.5. Пусть $X \subsetneq \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3$ – неприводимое аффинное подмножество, а $f: \mathbb{C}^3 \backslash X \longrightarrow \mathbb{C}$ регулярная функция на дополнении к X. Докажите, что f полиномиальная.

Задача 1.6. Пусть A – кольцо непрерывных комплекснозначных функций на компактном топологическом пространстве, а $I \subset A$ – нетривиальный идеал. Докажите, что у функций из I есть общие нули.

Определение 1.1. **Булево кольцо** есть кольцо такое, что все его элементы - идемпотенты.

Задача 1.7. Докажите, что в булевом кольце выполнено соотношение $2x = 0$ для любого x, а его максимальный спектр - хаусдорфово топологическое пространство.

Задача 1.8. Рассмотрим идеал $J \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, порожденный (yz, xz, xy). Найдите $k > 0$ такое, что $x^k \in J$, или докажите, что такого k нет.

1.2. Нетеровы кольца

Замечание. В этом разделе кольца не предполагаются по умолчанию конечно-порожденными или нетеровыми.

Задача 1.9. Найдите кольцо A, такое, что для любого идеала $I \subset A$ имеем $\bigcap_n I^n = 0$, но A не нетерово.

Задача 1.10. Верно ли, что любое подкольцо нетерова кольца нетерово?

Задача 1.11. Верно ли, что любое факторкольцо нетерова кольца нетерово?

Определение 1.2. **Свободный** A-модуль есть $A^n = \bigoplus^n A$.

Определение 1.3. A-модуль **конечно представим**, если он изоморфен фактору свободного модуля по конечно-порожденному подмодулю.

Задача 1.12. Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность A-модулей, причем M_1 и M_2 конечно-представимы. Докажите, что M_3 тоже конечно представим.

Задача 1.13. Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность A-модулей, причем M_1 и M_3 конечно-представимы. Докажите, что M_2 тоже конечно представим.

Определение 1.4. **Кручение** в A-модуле есть ядро естественного отображения $M \longrightarrow M \otimes_A k(A)$.

Задача 1.14. Пусть M – нетеров модуль без кручения над кольцом A без делителей нуля. Докажите, что A тоже нетерово.

Определение 1.5. Простой идеал называется **минимальным**, если он не содержит других простых идеалов, кроме себя.

Задача 1.15. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$. Докажите, что число минимальных простых идеалов в A конечно.

Задача 1.16. Пусть $M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t], \mathbb{C})$, снабженный естественной структурой $\mathbb{C}[t]$-модуля. Будет ли M конечно порожден над $\mathbb{C}[t]$?

1.3. Тензорные произведения

Определение 1.6. **Плоский модуль** над кольцом R есть такой R-модуль M, что функтор $M_0 \longrightarrow M \otimes_R M_0$ тензорного домножения на M точен.

Задача 1.17. Пусть M – плоский R-модуль. Докажите, что в M нет кручения.

Задача 1.18. Пусть $M_1 \subset M_2 \subset ...$ – последовательность вложенных R-модулей. Предположим, что все M_i плоские. Докажите, что $\bigcup M_i$ тоже плоский.

Определение 1.7. R-модуль M называется **обратимым**, если $M \otimes_R M^* \cong R$, где $M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$.

Задача 1.19. Докажите, что каждый конечно порожденный, обратимый R-модуль над нетеровым кольцом допускает вложение в свободный R-модуль.

Задача 1.20. Докажите, что обратимые R-модули образуют группу относительного тензорного произведения (эта группа называется **группой Пикара**). Найдите группу Пикара для $R = \mathbb{C}[t]$.

Задача 1.21. Пусть $M^n \xrightarrow{\phi} M$ – сюрьективный гомоморфизм, причем M обратимый модуль. Докажите, что ϕ допускает **сечение** $\psi : M \longrightarrow M^n$, то есть такой гомоморфизм, что $\phi(\psi(m)) = m$ для каждого $m \in M$.

Задача 1.22. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал. Докажите, что $\mathfrak{p}[x]$ – простой идеал в $A[x]$.

Задача 1.23. Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без делителей нуля. Докажите, что $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ не имеет делителей нуля.

Задача 1.24. Пусть M и N – конечно-порожденные модули над $R = \mathbb{C}[[t]]$, причем $M \otimes_R N = 0$. Докажите, что либо $M = 0$, либо $N = 0$.

Указание. Воспользуйтесь леммой Накаямы.

1.4. Целое замыкание и бирациональные отображения

Определение 1.8. Морфизм аффинных $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение, **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ – конечно-порожденный $\mathcal{O}_Y$-модуль, и **целым**, если он доминантный и конечный.

Определение 1.9. Пусть K – поле, содержащее $\mathbb{C}$. **Трансцендентная размерность** $\dim_{tr}(K)$ есть максимальное число n такое, что в K найдется n алгебраически независимых элементов.

Задача 1.25. Пусть A – кольцо комплексно-аналитических функций на $\mathbb{C}$, а $k(A)$ – его поле частных. Докажите, что $\dim_{tr} k(A) = \infty$.

Задача 1.26. Пусть $X \subset Y$ – неприводимые аффиные многообразия. Докажите, что $\dim_{tr}(X) \leqslant dim_{tr}(Y)$.

Задача 1.27. Пусть A – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{R}$, а I – максимальный идеал в A. Докажите, что A/I изоморфно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Задача 1.28. Пусть A – целозамкнутое кольцо без делителей нуля, $k(A)$ его поле частных, а $[K : k(A)]$ конечное расширение. Для каждого $x \in K$, рассмотрим умножение на x как элемент матричной алгебры $\operatorname{End}_{k(A)}(K)$, и пусть $N(x)$ обозначает определитель x. Докажите, что $N(x) \in A$ для любого элемента $x \in K$, целого над A.

Задача 1.29. Пусть A целозамкнутое кольцо, снабженное действием группы G, а A^G – его кольцо инвариантов. Докажите, что A^G целозамкнуто.

Задача 1.30. Приведите пример аффинного многообразия X и конечного биективного морфизма $f : X \longrightarrow Y$, не являющегося изоморфизмом.

Задача 1.31. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – целый морфизм аффинных многообразий, $\alpha \in \mathcal{O}_Y$, а $f^*\alpha$ обратима. Докажите, что α тоже обратима.

Задача 1.32. Докажите, что не существует доминантного морфизма из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^2$.