Алгебраическая геометрия,

лекция 1: алгебраические множества и алгебраические морфизмы

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

2 сентября 2011

Алгебраические множества и алгебраические отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – подмножество $\mathbb{C}^n$, заданное как множество общих решений системы полиномиальных уравнений $P_1(z_1, ..., z_n) = P_2(z_1, ..., z_n) = ... = P_k(z_1, ..., z_n) = 0$, где $P_i(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ – полиномы. Такое A называется **алгебраическим подмножеством в $\mathbb{C}^n$**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция вида

$$\varphi(z_1, ..., z_n) = \frac{P(z_1, ..., z_n)}{Q(z_1, ..., z_n)},$$

где $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, называется **рациональной функцией на $\mathbb{C}^n$.** Разделив на общие делители, можно всегда предполагать, что полиномы P и Q взаимно просты. Тогда множество нулей Q называется **дивизором полюсов** (или просто **множеством полюсов**) функции φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A,\ A' \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраические множества. **Алгебраическое отображение** $\varphi: A \longrightarrow A'$ есть отображение из A в A', которое задано в координатах набором рациональных функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$, причем полюса рациональных функций $\varphi_i = \frac{P_i}{Q_i}$ не пересекают A. **Алгебраическая функция** на A есть алгебраическое отображение $A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Свойства алгебраических множеств

ЗАМЕЧАНИЕ: В самом грубом приближении, **алгебраическая геометрия занимается алгебраическими множествами и алгебраическими отображениями.**

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **конечные пересечения и объединения алгебраических подмножеств снова алгебраичны.** Верно ли это для дополнений?

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко видеть, что **любая алгебраическая функция комплексно дифференцируема** (синонимы: голоморфна, комплексно-аналитична).

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте голоморфную функцию на $\mathbb{C}$, которая не алгебраична. Докажите ее неалгебраичность.

ПРОБЛЕМА: **Наше определение зависит от координат!**

РЕШЕНИЕ: Воспользуемся теорией категорий.

Определение категории

Определение: Категорией $\mathcal{C}$ называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами" и так далее), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

ДАННЫЕ.

Объекты: Множество $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ **объектов** $\mathcal{C}$ (иногда рассматривают не множество, а класс $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, задано множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y.

Композиция морфизмов: Если $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y), \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, Z)$, задан морфизм $\varphi \circ \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ задан морфизм $\mathrm{Id}_A \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A)$.

Определение категории (продолжение)

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$, $\mathrm{Id}_x \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_Y$

Определение: Пусть $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Примеры категорий:
Категория множеств
(морфизмы – произвольные отображения),
категория линейных пространств
(морфизмы – линейные отображения),
категории колец, полей, групп
(морфизмы – гомоморфизмы),
категория топологических пространств
(морфизмы – непрерывные отображения).

Le Bourgeois gentilhomme

Monsieur Jourdain. Et comme l'on parle qu'est-ce que c'est donc que cela?
Maître de philosophie. De la prose.
Monsieur Jourdain. Quoi? quand je dis: «Nicole, apportez-moi mes pantoufles, et me donnez mon bonnet de nuit», c'est de la prose?
Maître de philosophie. Oui, Monsieur.
Monsieur Jourdain. Par ma foi! il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela.

* * *

Г-н Журден. А когда мы разговариваем, это что же такое будет?

Учитель философии. Проза.

Г-н Журден. Что? Когда я говорю: "Николь, принеси мне туфли и ночной колпак", это проза?

Учитель философии. Да, сударь.

Г-н Журден. **Честное слово, я и не подозревал, что вот уже более сорока лет говорю прозой.** Большое вам спасибо, что сказали.

Аффинные многообразия

Избавляемся от зависимости от координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Категория аффинных многообразий** есть категория, объекты которой суть алгебраические подмножества в $\mathbb{C}^n$, а морфизмы – алгебраические отображения.

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте, что это категория.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное многообразие** над $\mathbb{C}$ есть алгебраическое подмножество в $\mathbb{C}^n$, заданное с точностью до изоморфизма (то есть **без фиксированных координат**).

Квазиаффинные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – дополнение алгебраического подмножества в $\mathbb{C}^n$ до алгебраического подмножества. Такое подмножество называется **квазиаффинным**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическая функция** на квазиаффинном множестве A есть рациональная функция вида $\frac{P}{Q}$, где $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ взаимно простые полиномы, а полюса Q не пересекают A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическое отображение** квазиаффинных многообразий $A, A' \subset \mathbb{C}^n$ есть отображение $\varphi: \ A \longrightarrow A'$, заданное в координатах набором из n алгебраических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Категория квазиаффинных многообразий** есть категория, объекты которой суть квазиаффинные многообразия, а морфизмы – алгебраические отображения. **Квазиаффинное многообразие** есть объект этой категории, с точностью до изоморфизма (то есть **без фиксированных координат**).

Алгебраические функции на $\mathbb{C}^n \backslash 0$.

Основная теорема алгебры:
Любой непостоянный полином $P \in \mathbb{C}[t]$ имеет корни над $\mathbb{C}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Вспомните как можно больше доказательств.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая алгебраическая функция $\varphi: \mathbb{C}^n \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}$ на квазиаффинном множестве $\mathbb{C}^n \backslash 0$, $n > 1$, **задается полиномом** $\underline{\varphi} \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По определению, $\varphi = \frac{P}{Q}$, причем множество нулей Q содержится в $\{0\}$. Коль скоро Q нигде не равно нулю на прямых, не проходящих через 0, **Q постоянна на всех таких прямых,** а значит, и на $\mathbb{C}^n \backslash 0$. ∎

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любая алгебраическая функция на дополнении $\mathbb{C}^n$ к конечному объединению подпространств коразмерности > 1 полиномиальна.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дивизор** в квазиаффинном многообразии есть множество нулей алгебраической функции f на A.

Аффинность некоторых квазиаффинных многообразий

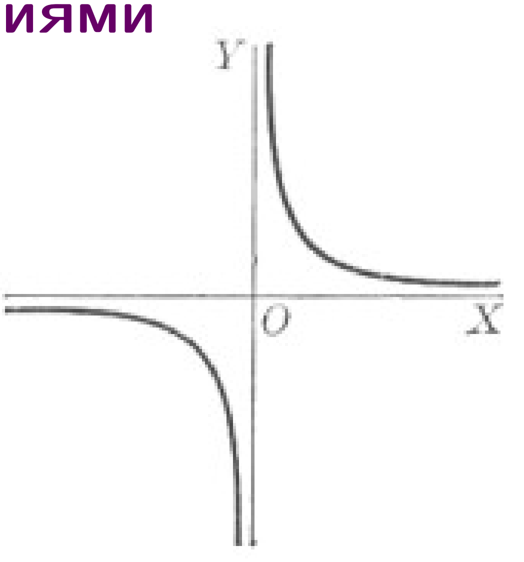
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квазиаффинное многообразие называется **аффинным**, если оно изоморфно аффинному.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, f – алгебраическая функция на A, а $D(f)$ – соответствующий дивизор. Тогда **квазиаффинное многообразие $A\backslash D(f)$ аффинно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть A изоморфно аффинному подмножеству $A \subset \mathbb{C}^n$, заданному системой полиномиальных уравнений $\{P_i(z_1, ..., z_n) = 0\}$. Рассмотрим отображение $A\backslash D(f) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^{n+1}$, переводящее точку $a \in A\backslash D(f) \in \mathbb{C}^n$ в $\left(a, \frac{1}{f(a)}\right)$.

1. Докажите, что образ $A\backslash D(f)$ в $\mathbb{C}^n$ **задается уравнениями** $\{P_i(z_1, ..., z_n) = 0, z_{n+1} f(z_1, ..., z_n) = 1.\}$

2. Докажите, что **Ψ – изоморфизм.** ■



Неаффинность некоторых квазиаффинных многообразий

ТЕОРЕМА: Квазиаффинное многообразие $\mathbb{C}^n\backslash 0$ не аффинно, для любого $n > 1$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть A – аффинное подмногообразие. **Тогда его пересечение с любым шаром $B_R := \{z \in \mathbb{C}^n \ \mid \ |z| \leqslant R\}$ компактно.**

Шаг 2: Пусть A – алгебраическое подмножество $\mathbb{C}^n$, $\{a_i\}$ – последовательность точек A, не имеющих предельных точек в A (такая последовательность называется **дискретной**). **Тогда $\lim_i |a_i| = \infty$** (следует из шага 1).

Шаг 3: Пусть A – алгебраическое подмножество $\mathbb{C}^n$, а $\{a_i\}$ – дискретная последовательность. **Тогда существует алгебраическая функция f, для которой последовательность $|f(a_i)|$ не ограниченна.** В самом деле, $|a_i|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j(a_i)|^2$, где z_j — координатные функции. Если $|z_j(a_i)| < C$, то $|a_i|^2 < nC^2$.

Неаффинность $\mathbb{C}^n \backslash 0$ (продолжение)

Шаг 4: Пусть $\{a_i\} \subset \mathbb{C}^n \backslash 0$ – последовательность, сходящаяся к 0. Поскольку все алгебраические функции на $\mathbb{C}^n \backslash 0$ полиномиальны, они непрерывны в 0. Поэтому $\lim_i f(a_i)$ определен для любой алгебраической функции. **В частности, $|f(a_i)| < C$, для какой-то константы C, не зависящей от i.**

Шаг 5: Последовательность $\{a_i\}$ из шага 4 не имеет предельных точек в $A = \mathbb{C}^n \backslash 0$. Поэтому, **если A аффинно, то для какой-то алгебраической функции последовательность $|f(a_i)|$ не ограниченна** (шаг 3). **Это невозможно в силу шага 4.** Значит, A не аффинно. ■

Наблюдение: Ключевой момент доказательства – то, что **кольца алгебраических функций на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n \backslash 0$ изоморфны.**

Философия: Оказывается, **аффинное многообразие однозначно задается своим кольцом функций**. Это – важнейшая идея алгебраической геометрии.

Лемма Цорна

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq x$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$.

Лемма Цорна Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. **Тогда в S найдется максимальный элемент.**

УПРАЖНЕНИЕ: Изучите вывод леммы Цорна из аксиомы выбора.

Идеалы в кольцах

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Идеал** I в кольце R есть подмножество $I \subsetneq R$, замкнутое относительно сложения, и такое, что для любого $a \in I, f \in R$, произведение fa лежит в I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Факторгруппа R/I снабжена естественной структурой кольца (называется **факторкольцо**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Максимальный идеал** есть идеал $I \subset R$ в кольце R, такой, что для любого идеала $I' \supset I$ имеет место $I' = I$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $a \in R$ – элемент кольца, который не обратим. Докажите, что a **содержится в каком-то идеале R.**

Из этого утверждения выводится следующее.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **идеал I максимален тогда и только тогда, когда R/I – поле.**

Существование максимальных идеалов

ТЕОРЕМА: Пусть $I \subset R$ – идеал в кольце. **Тогда I содержится в максимальном идеале.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим лемму Цорна к множеству всех идеалов, упорядоченному по вложению. ■

Упражнение (довольно нетривиальное): Выведите лемму Цорна из теоремы о существовании максимальных идеалов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, а $\mathcal{O}_A$ – кольцо алгебраических функций на A. Для каждого подмножества $Z \subset A$ рассмотрим идеал I_Z функций, которые зануляются в Z. **Тогда I_a – максимальный для любой точки $a \in A$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой функции $f \in \mathcal{O}_A$, функция $f - f(a)$ лежит в I_a, значит, **фактор $\mathcal{O}_A/I_a$ изоморфен $\mathbb{C}$.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал I_a называется **идеалом точки $a \in A$.**

Hilbert's Nullstellensatz

Теорема Гильберта о нулях Пусть A – аффинное многообразие, а $\mathcal{O}_A$ – кольцо полиномиальных функций на A. Тогда **любой максимальный идеал в $\mathcal{O}_A$ равен I_a,** для какой-то точки $a \in A$.

Доказательство основано на следующей линейно-алгебраической идее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базис Коши-Гамеля** в векторном пространстве V есть максимальный набор линейно независимых векторов V.

УПРАЖНЕНИЕ: **Базис Коши-Гамеля всегда существует** (выведите это из леммы Цорна).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любые два базиса Коши-Гамеля равномощны.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное пространство называется **счетномерным**, если у него есть счетный базис Коши-Гамеля, и **несчетномерным,** если оно бесконечномерно и у него нет такого базиса.

Hilbert's Nullstellensatz: доказательство

Доказательство теоремы Гильберта. Шаг 1: Для идеала $I \subset \mathcal{O}_A$, обозначим за $V(I)$ множество общих нулей всех $f \in I$, то есть

$$V(I) := \{a \in A \mid \forall f \in I, f(a) = 0\}.$$

Если $V(I)$ содержит $a \in A$, то $I \subset I_a$. Значит, для любого максимального идеала $I \subset A$, множество $V(I)$ пусто, либо состоит из одной точки. **Для доказательство теоремы Гильберта о нулях достаточно доказать, что $V(I)$ непусто для любого максимального идеала**.

Шаг 2: Пусть I – максимальный идеал. Тогда $k = \mathcal{O}_A/I$ – поле, содержащее поле $\mathbb{C}$ (констант). Поскольку $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, **любой элемент $t \in k \backslash \mathbb{C}$ трансцендентен.**. Это значит, что $\mathbb{C} = k$, либо $k \supset \mathbb{C}(t)$, где $\mathbb{C}(t)$ обозначает поле рациональных функций.

Шаг 3: Поскольку кольцо $\mathcal{O}_A$ порождено координатными мономами, оно счетномерно как векторное пространство над $\mathbb{C}$. То же верно и в отношении $k = \mathcal{O}_A/I$.

Hilbert's Nullstellensatz: продолжение доказательства

Шаг 4: Для любого набора $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ попарно различных точек, **рациональные функции** $\left\{\frac{1}{t-a_i}\right\} \in \mathbb{C}(t)$ **линейно независимы над** $\mathbb{C}$**.** В самом деле, если $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{t-a_i} = 0$, то

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\dots\widehat{(t-a_i)}\dots(t-a_n)}{\left(\prod_{i=1}^k (t-a_i)\right)} = 0.$$

(значком $\widehat{(t-a_i)}$ помечен выкинутый из произведения сомножитель), то есть

$$P(t) := \sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\dots\widehat{(t-a_i)}\dots(t-a_n) = 0.$$

Но $P(a_1) = \lambda_1 (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) \neq 0$.

Шаг 5: Поскольку все $\frac{1}{t-a}$, $a \in C$, линейно независимы, $\mathbb{C}(t)$ **несчетномерно**.

Шаг 6: В силу шага 2, $k = \mathcal{O}_A/I$ равно $\mathbb{C}$ либо содержит $\mathbb{C}(t)$, а в силу шага 5, $\mathbb{C}(t)$ несчетномерно. Это противоречит шагу 3, где доказано, что k счетномерно. Поэтому $k = \mathbb{C}$.

Hilbert's Nullstellensatz: окончание

Шаг 7: Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$, а $z_1, .., z_n$ – координатные функции. Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм $\varphi: \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A/I = \mathbb{C}$, построенный выше. Пусть $a := (\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) \in \mathbb{C}^n$. Если $P(z_1, ..., z_n) \in I$, то

$$0 = \varphi(P) = P(\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) = P(a).$$

Следовательно, **все функции $P \in I$ зануляются в a.**

Шаг 8: Пусть I_A – идеал всех полиномов, зануляющихся на A. Поскольку $I \supset I_A$, любой полином, который зануляется в A, зануляется и в a. Поскольку A задано системой полиномиальных уравнений, $a \in A$. **Мы получили, что I совпадает с I_a.** ■

Другое доказательство того, что $A := \mathbb{C}^n \backslash 0$, $n > 1$ не аффинно.

Шаг 1: Возьмем в $\mathcal{O}_A = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ идеал всех функций, зануляющихся в 0. **Он максимален.**

Шаг 2: Эти функции не имеют общих нулей в A, что противоречит теореме Гильберта о нулях. Значит, **A не аффинно.** ■