Алгебраическая геометрия,

лекция 10: лемма Нетер о нормализации

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

9 декабря 2011

Оценки за курс

Максимальное количество баллов за экзамен равно 30.

Зачет за весь курс ставится в одном из двух случаев.

1. Для сдавших первый модуль, зачет за курс (и за второй модуль) ставится студентам, получившим за семестр (листочки, контрольные, экзамен) суммарно 90 баллов. Оценка вычисляется по формуле $b = 4 + [0.1 * (s - 90) + 0.5]$, то есть для оценки 10 за семестр нужно набрать 140 баллов.

Оценка за второй модуль вычисляется по формуле $b = 4 + [0.2 * (s - 45) + 0.5]$, где [ ] обозначает целую часть.

2. Для не сдавших первый модуль, есть два пути:

а. Сдать семестр, набрав 90 баллов. Это дает заодно зачет и по первому модулю.

б. Сдать 4 из листочков 1-5 целиком, и набрать 45 баллов за второй модуль. В этом случае, оценка за второй модуль вычисляется по формуле $b = 4 + [0.2 * (s - 45) + 0.5]$, а оценка за семестр получается средним арифметическим из 4 и оценки за первый модуль.

Оценки за курс (продолжение)

16-го декабря - экзамен!

3. **Прошу прислать мне отсканированные ведомости за листки 4-6, 7-9, 10-11 емэйлом до 28-го декабря**. Отметьте, сколько вам баллов причитается, по вашему мнению, за каждый из листков. Если вы пересдавали первый модуль, пришлите также скан ведомости за листки 1-3.

4. Ближе к 28-29 декабря, я размещу результаты на

`http://bogomolov-lab.ru/KURSY/AG-2011/`

Пожалуйста, внимательно посмотрите их. Если вы найдете ошибки в оценках, **сообщите мне емэйлом**. После того, как я пошлю эти цифры в учебную часть, изменить их будет гораздо труднее.

Целая зависимость (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Элемент $b \in B$ называется **целым над A**, если подкольцо $A[b] = A \cdot \langle 1, b, b^2, b^3, ...\rangle$, порожденное b и A, конечно порождено как A-модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полином называется **унитарным**, если его старший коэффициент равен 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ: x цел над $A \subset B \Leftrightarrow x$ является корнем унитарного полинома с коэффициентами из A. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ нетерово кольцо. Тогда **сумма, произведение целых над A элементов $x, y \in B$ – целые.**

Конечные морфизмы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий. Этот морфизм называется **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль.

ТЕОРЕМА: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – конечный морфизм. **Тогда для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль, кольцо $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ конечно-порождено как $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y$-модуль. Но поскольку $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y = \mathbb{C}$, получаем, что R **конечномерно.**

Шаг 2: Пусть N – нильрадикал R. Поскольку R/N конечномерно, число простых идеалов в R/N конечно. Значит, $\operatorname{Spec}(R/N)$ **– конечное множество.**

Шаг 3: С другой стороны, $\operatorname{Spec}(R/N) = f^{-1}(y)$. ■

Лемма Накаямы


Tadashi Nakayama
(1912-1964)

ВОПРОС: Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в нетеровом кольце. **Как доказать, что $\bigcap_i \mathfrak{a}^i = 0$?**

ОТВЕТ: Лемма Накаямы!

ЗАМЕЧАНИЕ: Это неверно, если A – кольцо непрерывных функций.

ТЕОРЕМА: Пусть A – нетерово кольцо, M – конечно-порожденный A-модуль, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $IM = M$. **Тогда для какого-то $a \in I$, имеем $(1-a)M = 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть Φ – эндоморфизм конечно-порожденного A-модуля, e_i – образующие M, а $\Phi(e_i) = \sum a_{ij} e_j$. Определим **характеристический полином** $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t) \in A[t]$ как определитель матрицы $\det(t\,\mathrm{Id} - A)$, где $A = (a_{ij})$

Предостережение: Он не единственный!

Лемма Накаямы (продолжение)

Шаг 2: $\operatorname{Chpoly}_\Phi(A) = 0$ (теорема Гамильтона-Кэли).

Шаг 3: Пусть M – конечно-порожденный A-модуль над нетеровым кольцом, $\Phi \in \operatorname{End}_A(M)$, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $\Phi(M) \subset IM$. Тогда **для какого-то характеристического полинома $\operatorname{Chpoly}_\Phi(t)$, все коэффициенты $\operatorname{Chpoly}_\Phi(t)$ лежат в A.** В самом деле, $\Phi(e_i)$ лежит в IM, значит, выражается в виде $\sum a_{ij}e_j$, где $a_{ij} \in I$.

Шаг 4: Пусть $P(t) = \sum a_i t^i$ – характеристический полином для тождественного эндоморфизма $\operatorname{Id} \in \operatorname{End}_A(M)$, а S – сумма его коэффициентов. **В силу теоремы Гамильтона-Кэли, $P(\operatorname{Id})(m) = \sum_i a_i \cdot m = Sm = 0$.**

Шаг 5: Для доказательства леммы Накаямы, применим утверждение шага 3 к $\Phi = \operatorname{Id}$, и получим, что **все коэффициенты $\operatorname{Chpoly}_{\operatorname{Id}}(t)$, кроме старшего, лежат в I, а старший равен 1.** Теперь Накаяма следует из шага 4. ■

Целые морфизмы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм $X \longrightarrow Y$ называется **целым**, если он конечный и доминантный, а X неприводимо.

ТЕОРЕМА: **Целый морфизм всегда сюрьективен.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – целый морфизм, $A = \mathcal{O}_Y$, $B = \mathcal{O}_X$. **Это равносильно тому, что $A \subset B$ – подкольцо, B без делителей нуля, причем B конечно-порождено как A-модуль.**

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{m}_y \subset A$ – максимальный идеал, соответствующий $y \in Y$. **По лемме Накаямы, $\mathfrak{m}_y B \neq B$.**

Шаг 3: $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A A/\mathfrak{m}_y) = B/\mathfrak{m}_y B$. **Поскольку это кольцо ненулевое, множество $f^{-1}(y)$ непусто.** ■

Целое замыкание (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Получаем, что **при целом морфизме, прообраз каждой точки – конечное, непустое множество.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B, целых над A, называется **целым замыканием A в B**. Множество всех элементов поля частных A, целых над A, называется **целым замыканием A**.

ТЕОРЕМА: Пусть A – нетерово кольцо без делителей нуля, $K : k(A)$ – конечное расширение, а B – целое замыкание A в K. **Тогда B конечно порождено как A-модуль,** а морфизм $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ – целый.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – неприводимое аффинное многообразие. **Нормализация** A есть спектр его целого замыкания.

Свойства нормализации: Пусть $\nu: \ X \longrightarrow Y$ – нормализация. Тогда ν **конечно и бирационально**, то есть это

1. **Изоморфизм вне какого-то дивизора**.

2. Прообраз каждой точки – **конечен и непуст.**

Трансцендентные расширения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $[k:\mathbb{C}]$ – расширение поля $\mathbb{C}$, а $[K:k]$ – расширение k, порожденное над k элементом z. **Тогда либо z трансцендентно, и $K=k(z)$ изоморфно полю рациональных функций, либо z алгебраично, а $[K:k]$ конечно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В самом деле, **либо z – корень какого-то многочлена, и тогда $[K:k]$ конечно, либо K содержит кольцо полиномов $k[z]$,** и в этом случае K содержит $k(z)$. ■

ЛЕММА: Если $[K:k]$ конечное расширение, то **поля рациональных функций $[K(t):k(t)]$ образуют конечное расширение.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Теорема о примитивном элементе дает $K=k[\alpha]$, где α – алгебраический элемент. Тогда $K(t)=k(t)[\alpha]$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Придумайте доказательство без теоремы о примитивном элементе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $[K:\mathbb{C}]$ – расширение поля $\mathbb{C}$. Оно называется **чисто трансцендентным размерности** n, если K изоморфно полю $\mathbb{C}(z_1,z_2,...,z_n)$ рациональных функций на $\mathbb{C}^n$.

Базис трансцендентности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базис трансцендентности** поля $[K:\mathbb{C}]$ есть набор элементов $z_1, ..., z_n \in K$, порождающий чисто трансцендентное расширение $K' := \mathbb{C}(z_1, z_2, ..., z_n)$ такое, что $[K:K']$ конечно.

ТЕОРЕМА: Пусть $k(X)$ – поле рациональных функций на аффинном многообразии, причем $\mathcal{O}_X$ порождено $t_1, ..., t_n$. **Тогда какое-то подмножество $\{t_i\}$ будет базисом трансцендентности для $k(X)$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $k(X)$ конечно порождено, **можно воспользоваться индукцией по числу образующих $t_1, ..., t_n$.** Пусть $A \subset \mathcal{O}_X$ – подкольцо, порожденное $t_1, ..., t_{n-1}$, а $t_1, ..., t_k$ – базис транцендентности в $k(A)$.

Шаг 2: **Либо t_n алгебраично над $k(A)$, и тогда $k(X) : k(A)$ конечномерно; либо оно трансцендентно, и тогда $k(X)$ содержит $k(t_1, ..., t_k)(t_n) = k(t_1, ..., t_k, t_n)$.** Во втором случае $[k(A) : k(t_1, ..., t_k)]$ конечномерно, а значит, $k(X) = k(A)(t_n)$ конечномерно над $k(t_1, ..., t_k)(t_n)$ в силу вышеприведенной леммы. ■

Базис трансцендентности и доминантные морфизмы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие, $t_1, ..., t_n$ – координаты на t_n, а $\Pi_k : \ X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ – проекция на первые k координат. Обозначим за K подполе в поле частных $k(X)$, порожденное $t_1, ..., t_k$. Тогда следующие утверждения равносильны.

(и) **Отображение $\Pi_k : \ X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ доминантно.**

(ии) **Расширение $K : \mathbb{C}$ чисто трансцендентно размерности k.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Доминантный морфизм есть морфизм, индуцирующий вложение полей $k(\mathbb{C}^k) \hookrightarrow k(X)$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В условиях этого утверждения, $[k(X) : k(\mathbb{C}^k)]$ – **конечное расширение тогда и только тогда, когда $t_1, ..., t_k$ – базис трансцендентности.**

ВОПРОС: А когда Π_k конечно?

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы решаем такую задачу. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие. **Мы ищем проекцию $\Pi_k : \ X \longrightarrow \mathbb{C}^k$, которая конечна.**

Конечность морфизма проекции

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие, z_i координаты на $\mathbb{C}^n$, а $z_1, ..., z_k$ – базис трансцендентности в $k(X)$. **Тогда Π_{n-1} конечно, если z_n – корень унитарного многочлена с коэффициентами в $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$.** Отметим, что **ненулевой многочлен $P(z_n) = 0$ с коэффициентами в $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$ всегда существует, так как $z_1, ..., z_k$ базис трансцендентности, но он не всегда унитарен.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Тогда **существует линейная замена координат вида $z_i' := z_i + \lambda_i z_n$, такая, что z_n конечен над $z_1', ..., z_k'$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $F(z_1, ..., z_k, z_n)$ – однородная компонента старшей степени d многочлена $P(z_1, ..., z_k, z_n)$, а $\lambda_1, ..., \lambda_k$ комплексные числа, такие, что $F(\lambda_1, ..., \lambda_k, 1) \neq 0$. Пусть $z_i' := z_i + \lambda_i z_n$, где $i = 1, ..., k$. Рассмотрим многочлен $Q(z_1', ..., z_k', z_n) := F(z_1 + \lambda_1 z_n, , , m z_k + \lambda_k z_n, z_n)$. Тогда $Q(0, 0, ..., 0, 1) = F(\lambda_1, ..., \lambda_k, 1) \neq 0$,

Шаг 2: Следовательно, у многочлена $Q(z_1', ..., z_k', z_n)$ ненулевой коэффициент при z_n^d.

Шаг 3: Значит, **z_n – корень унитарного многочлена $P_1(z_1', ..., z_k', z_n) := P(z_1 + \lambda_1 z_n, ..., z_k + \lambda_k z_n, z_n)$.** ■

Лемма Нетер о нормализации

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $A \subset B \subset C$ кольца без делителей нуля, причем C конечно над B, а B над A. **Тогда C конечно над A.**

СЛЕДСТВИЕ: (лемма Нетер о нормализации)
Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие, z_i координаты на $\mathbb{C}^n$, а $z_1, ..., z_k$ – базис трансцендентности в $k(X)$. **Тогда для общей линейной замены вида $z_i' := z_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_{ij}$, $i = 1, ..., k$ проекция на $z_1', ..., z_k'$ конечна.**

Доказательство. Шаг 1: Нужно убедиться, что $z_{k+1}, ..., z_n|_X$ конечны над $\mathbb{C}[z_1', ..., z_k'] \subset \mathcal{O}_X$. Применив индукцию по n, **можно считать, что $z_{k+1}, ..., z_{n-1}$ конечны над $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$.**

Шаг 2: Из только что доказанного утверждения следует, что для общей замены вида $z_i' := z_i + \lambda_i z_n$, функция $z_n \in \mathcal{O}_X$ конечна над $\mathbb{C}[z_1', ..., z_k']$. Но в этом случае, z_i тоже конечны над $\mathbb{C}[z_1', ..., z_k']$. Поскольку $z_{k+1}, ..., z_{n-1}$ конечны над $\mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$, они конечны и над $\mathbb{C}[z_1', ..., z_k']$, в силу вышеприведенного замечания. ■

Теорема о примитивном элементе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $[K : k]$ – конечное расширение. Элемент $\alpha \in K$ **примитивный**, если он порождает K над k.

ЗАМЕЧАНИЕ: Элемент $\alpha \in K$ примитивен тогда и только тогда, когда он **не содержится ни в одном в промежуточном подполе** $K' \subsetneq K$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Обозначим за $\mathbb{K}$ алгебраическое замыкание K. Тогда $K \otimes_k \mathbb{K}$ конечномерное над $\mathbb{K}$, полупростое артиново кольцо, значит, изоморфно прямой сумме нескольких копий $\mathbb{K}$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Для любого конечного расширения $[K : k]$, **число промежуточных полей $K \subsetneq K' \subsetneq k$ конечно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Они соответствуют прямым слагаемым в $K \otimes_k \mathbb{K} = \bigoplus^n \mathbb{K}$, число которых конечно.** ■

Из этого следует теорема о примитивном элементе, в такой форме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, а $z_1, ..., z_k$ – базис трансцендентности в $k(X)$. **Тогда общая линейная композиция вида $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i z_i$ порождает $k(X)$ над $\mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$.**

Лемма Нетер о нормализации

ТЕОРЕМА: (Лемма Нетер о нормализации, другая формулировка) Пусть X – неприводимое аффинное многообразие. Тогда существует унитарный многочлен $P(t) \in A[t]$, где $A = \mathbb{C}[z_1, ..., z_k]$, и **бирациональное, конечное отображение из X на множество нулей $P(t)$ в $\mathbb{C}^{k+1}$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ Воспользуемся лемммой Нетер доказанной выше, сделаем линейную замену координат, и **добьемся, чтобы проекция $\Pi_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$, была конечна.**

Шаг 2: Пусть z – линейная комбинация координат $z_{k+1}, ..., z_n$, которая примитивна, то есть порождает расширение $k(X)$ над $\mathbb{C}(z_1, ..., z_k)$. **Тогда проекция X на $z_1, ..., z_k, z$ конечна и индуцирует изоморфизм полей частных.** ■

Существование гладких точек

СЛЕДСТВИЕ: Каждое аффинное многообразие X содержит гладкие точки.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку множество гладких точек открыто, достаточно доказать теорему, когда X неприводимо.

Шаг 2: Применим утверждение леммы Нетер, получим бирациональную и конечную проекцию $\varphi : X \longrightarrow X'$, где X' – множество общих нулей унитарного многочлена $P(t)$. Поскольку φ – изоморфизм вне какого-то дивизора, **достаточно доказать, что общая точка в X' гладкая**, или, что эквивалентно – что X' содержит гладкие точки.

Шаг 3: Поскольку X' есть множество нулей $P(t)$, чтобы найти на нем гладкую точку, достаточно убедиться, что X' не лежит в множестве критических точек P.

Шаг 4: Поскольку X' неприводимо, можно считать, что $P(t)$ неприводим как многочлен от t. Тогда $\frac{dP(t)}{dt}$ не имеет общих делителей с $P(t)$, значит, эта функция ненулевая на каких-то решениях $P(t) = 0$. **В этих точках P регулярно.** ■