Алгебраическая геометрия,

лекция 2: категория аффинных многообразий

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

9 сентября 2011

Определение категории

Определение: Категорией $\mathcal{C}$ называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами" и так далее), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

ДАННЫЕ.

Объекты: Множество $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ **объектов** $\mathcal{C}$ (иногда рассматривают не множество, а класс $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, задано множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y.

Композиция морфизмов: Если $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y), \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, Z)$, задан морфизм $\varphi \circ \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ задан морфизм $\mathrm{Id}_A \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A)$.

Определение категории (продолжение)

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$, $\mathrm{Id}_X \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_Y$

Определение: Пусть $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Примеры категорий:
Категория множеств
(морфизмы – произвольные отображения),
категория линейных пространств
(морфизмы – линейные отображения),
категории колец, полей, групп
(морфизмы – гомоморфизмы),
категория топологических пространств
(морфизмы – непрерывные отображения).

Квазиаффинные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическое множество** есть множество общих нулей идеала в кольце полиномов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – дополнение алгебраического подмножества в $\mathbb{C}^n$ до алгебраического подмножества. Такое подмножество называется **квазиаффинным**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическая (регулярная) функция** на квазиаффинном множестве A есть рациональная функция вида $\frac{P}{Q}$, где $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ взаимно простые полиномы, а полюса Q не пересекают A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическое отображение** квазиаффинных многообразий $A, A' \subset \mathbb{C}^n$ есть отображение $\varphi : A \longrightarrow A'$, заданное в координатах набором из n алгебраических функций.

Категория квазиаффинных многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Категория квазиаффинных многообразий** есть категория, объекты которой суть квазиаффинные многообразия, а морфизмы – алгебраические отображения. **Квазиаффинное многообразие** есть объект этой категории, с точностью до изоморфизма (то есть **без фиксированных координат**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квазиаффинное многообразие называется **аффинным**, если оно изоморфно многообразию, построенному по алгебраическому множеству.

Идеалы в кольцах (повторение)

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей, $1 \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Идеал** I в кольце R есть подмножество $I \subset R$, замкнутое относительно сложения, и такое, что для любого $a \in I, f \in R$, произведение fa лежит в I. Идеал называется **нетривиальным**, если он не равен R. В дальнейшем, **все идеалы по умолчанию предполагаются нетривиальными.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Факторгруппа R/I снабжена естественной структурой кольца (называется **факторкольцо**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Максимальный идеал** есть идеал $I \subset R$ в кольце R, такой, что для любого идеала $I' \supset I$ имеет место $I' = I$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $a \in R$ – элемент кольца, который не обратим. Докажите, что a **содержится в каком-то идеале** R**.**

Из этого утверждения выводится следующее.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **идеал** I **максимален тогда и только тогда, когда** R/I **– поле.**

Существование максимальных идеалов (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть $I \subset R$ – идеал в кольце. **Тогда I содержится в максимальном идеале.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим лемму Цорна к множеству всех идеалов, упорядоченному по вложению. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, а $\mathcal{O}_A$ – кольцо алгебраических функций на A. Для каждого подмножества $Z \subset A$ рассмотрим идеал I_Z функций, которые зануляются в Z. **Тогда I_a – максимальный для любой точки $a \in A$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой функции $f \in \mathcal{O}_A$, функция $f - f(a)$ лежит в I_a, значит, **фактор $\mathcal{O}_A/I_a$ изоморфен $\mathbb{C}$.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал I_a называется **идеалом точки $a \in A$.**

Hilbert's Nullstellensatz (повторение)

Теорема Гильберта о нулях: Любой максимальный идеал в кольце $R = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ полиномов над $\mathbb{C}$ равен I_a, для какой-то точки $a \in A$.

Доказательство основано на следующей линейно-алгебраической идее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Базис Коши-Гамеля в векторном пространстве V есть максимальный набор линейно независимых векторов V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное пространство называется **счетномерным**, если у него есть счетный базис Коши-Гамеля, и **несчетномерным,** если оно бесконечномерно и у него нет такого базиса.

Доказательство теоремы Гильберта. Шаг 1: Для идеала $I \subset R$, обозначим за $V(I)$ множество общих нулей всех $f \in I$, то есть

$$V(I) := \{a \in \mathbb{C}^n \ \mid\ \forall f \in I, f(a) = 0\}.$$

Если $V(I)$ содержит $a \in A$, то $I \subset I_a$. Значит, для любого максимального идеала $I \subset A$, множество $V(I)$ пусто, либо состоит из одной точки. **Для доказательство теоремы Гильберта о нулях достаточно доказать, что $V(I)$ непусто для любого максимального идеала**.

Hilbert's Nullstellensatz: продолжение доказательства

Шаг 2: Рассмотрим естественное отображение констант $\mathbb{C} \longrightarrow R/I$. **Предположим, что это изоморфизм.** Обозначим за $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{C}$ соответствующий гомоморфизм. Пусть $a := (\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) \in \mathbb{C}^n$. Если $P(z_1, ..., z_n) \in I$, то

$$0 = \varphi(P) = P(\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) = P(a).$$

Следовательно, **все функции $P \in I$ зануляются в a. Для доказательство теоремы Гильберта о нулях достаточно доказать, что отображение констант $\mathbb{C} \longrightarrow R/I$ – изоморфизм**.

Шаг 3: Пусть I – максимальный идеал. Тогда $k = R/I$ – поле, содержащее поле $\mathbb{C}$ (констант). Поскольку $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, **любой элемент $t \in k \backslash \mathbb{C}$ трансцендентен.** Это значит, что $\mathbb{C} = k$ и все доказано, либо $k \supset \mathbb{C}(t)$, где $\mathbb{C}(t)$ обозначает поле рациональных функций.

Шаг 4: Поскольку кольцо R порождено координатными мономами, оно счетномерно как векторное пространство над $\mathbb{C}$. То же верно и в отношении $k = R/I$. **Осталось доказать, что у $\mathbb{C}$ нет нетривиальных счетномерных расширений.**

Hilbert's Nullstellensatz: окончание доказательства

Шаг 5: Для любого набора $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ попарно различных точек, **рациональные функции $\left\{\frac{1}{t-a_i}\right\} \in \mathbb{C}(t)$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.** В самом деле, если $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{t-a_i} = 0$, то

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\dots\widehat{(t-a_i)}\dots(t-a_n)}{\left(\prod_{i=1}^k (t-a_i)\right)} = 0.$$

(значком $\widehat{(t-a_i)}$ помечен выкинутый из произведения сомножитель), то есть

$$P(t) := \sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\dots\widehat{(t-a_i)}\dots(t-a_n) = 0.$$

Но $P(a_1) = \lambda_1 (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) \neq 0$, если $\lambda_1 \neq 0$.

Шаг 6: Поскольку все $\frac{1}{t-a}$, $a \in C$, линейно независимы, $\mathbb{C}(t)$ **несчетномерно**. ■

Регулярные функции на аффинных многообразиях

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $F := P/Q$ – алгебраическая функция на аффинном многообразии $A \subset \mathbb{C}^n$. Тогда **она равна полиному** $P' \in \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть I_A – идеал полиномиальных функций, которые зануляются в A, а $I_A + Q$ – идеал, порожденный Q и I_A. Поскольку $Q \neq 0$ на A, $I_A + Q$ не имеет общих нулей, значит, содержит 1. Поэтому $aQ = 1 \mod I_A$, для какого-то полинома a. Поэтому $a = Q^{-1}$ на A, то есть Q **обратимо в кольце** $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I_A$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\mathcal{O}_A$ – кольцо полиномиальных (алгебраических) функций на аффинном многообразии, а $I \subset \mathcal{O}_A$ – максимальный идеал. Тогда I **есть идеал точки** $a \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $\mathcal{O}_A = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I_A$, I **задает максимальный идеал в кольце полиномов,** и можно применить теорему Гильберта о нулях. ■

Функторы

Категории сами образуют категорию; морфизмами этой категории являются **функторы**.

Определение: Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – категории. **Ковариантным функтором** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ называется следующий набор данных.

1. **Отображение** $F: \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{C}_2)$, ставящее в соответствие объектам $\mathcal{C}_1$ объекты $\mathcal{C}_2$.

2. **Отображение морфизмов** $F: \mathcal{M}or(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}or(F(X),F(Y))$, определенное для любой пары объектов $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1)$.

Чтобы эти данные задавали функтор, они **должны удовлетворять условию** $F(\varphi) \circ F(\psi) = F(\varphi \circ \psi)$.

Примеры функторов

Любая "естественная операция" на математических объектах - это функтор. Например:

Отображение $X \longrightarrow 2^X$ – функтор на категории множеств.

Отображение $M \longrightarrow M^I$ – функтор на топологических пространствах, для любого заданного набора индексов I.

Отображение $V \longrightarrow V \oplus V$ – функтор на линейных пространствах.

Тождественный функтор из категории в себя.

Ображение, ставящее в соответствие топологическому пространству множество его связных компонент.

Контравариантные функторы

Определение: Если задана категория $\mathcal{C}$, определим **двойственную категорию** $\mathcal{C}^{op}$. Множество объектов в $\mathcal{C}^{op}$ – то же самое, что и в $\mathcal{C}$, а $\mathcal{M}\mathrm{or}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \mathcal{M}\mathrm{or}_{\mathcal{C}}(B,A)$. Соответственно, композиция $\varphi \circ \psi$ в $\mathcal{C}$ дает композицию $\psi^{op} \circ \varphi^{op}$ в $\mathcal{C}^{op}$.

Определение: **Контравариантный функтор** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ – это ковариантный функтор из $\mathcal{C}_1^{op}$ в $\mathcal{C}_2$.

Пример: Отображение, ставящее в соответствие топологическому пространству M кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на M – контравариантный функтор из топологических пространств в кольца.

Пример: Пусть $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объект категории $\mathcal{C}$. Тогда отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ задает ковариантный функтор из $\mathcal{C}$ в категорию Set множеств, а отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(Y,X)$ задает контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в Set. Такие функторы называются **представимыми**.

Изоморфизм и эквивалентность функторов

Определение: Пусть $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y,X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Определение: Два функтора $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X : F(X) \longrightarrow G(X)$, причем для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$, имеем $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$.

Замечание: Подобные коммутационные отношения принято изображать **коммутативными диаграммами**. Так, к примеру, условие $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$ можно записать следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \Psi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array}$$

Эквивалентность категорий

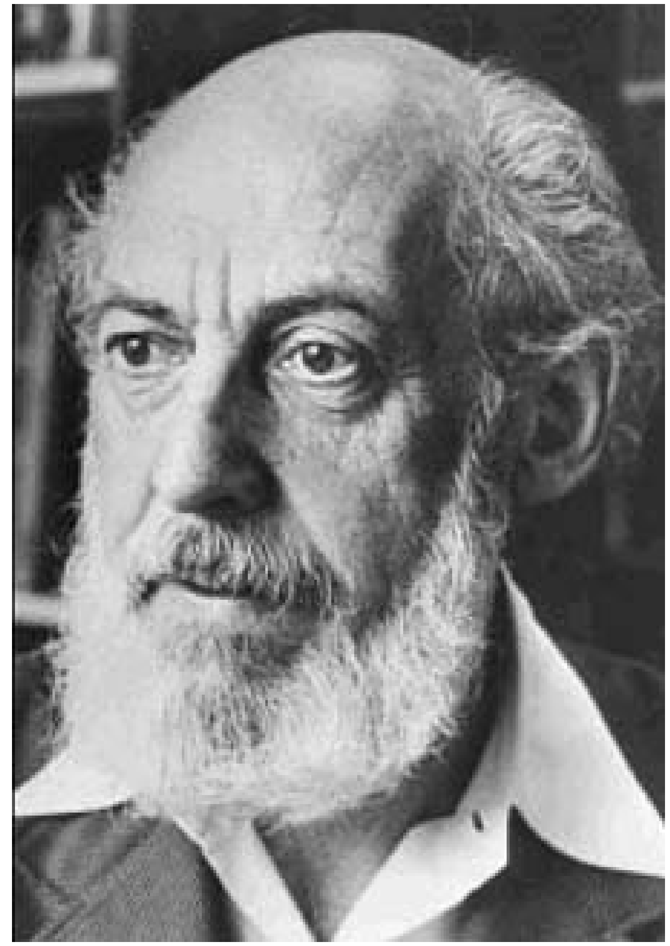
Определение: Функтор $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если он задан функтор $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ такой, что композиции $G \circ F$ и $G \circ F$ эквивалентны тождественым функторам $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$.

Замечание: Можно проверить, что это равносильно следующему: F задает биекцию на классах изоморфизма объектов, и биекцию

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X),F(Y)).$$

С точки зрения теории категорий, эквивалентные категории неразличимы.

Saunders Mac Lane
(1909-2005)



Samuel Eilenberg
(1913-1998)

Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)

Категория аффинных многообразий и категория колец

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$** есть фактор $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ по идеалу.

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathcal{C}_R$ есть категория конечно-порожденных колец над $\mathbb{C}$, не содержащих нильпотентов, а $\mathcal{C}_A$ – категория аффинных многообразий. Тогда $\mathcal{C}_R$ **эквивалентна** $\mathcal{C}_A^{op}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Будет на следующем занятии. ■

Экспонента и полиномы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество, а $f = e^{z_1}$ – экспонента от координаты z_1. Тогда, **если f алгебраична на A, то она постоянна на каждой компоненте линейной связности.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим идеал функций $\varphi \in \mathcal{O}_A$ таких, что

$$\exists p \in \mathbb{N} \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ | \quad \lim_{z_1 \to -\infty} |z_1|^N |z|^{-p} \varphi(z) = 0.$$

Общих нулей у этого идеала нет, ибо он содержит экспоненту. Констант он не содержит, если в A есть последовательность точек a_i такая, что $\lim_i z_1(a_i) = -\infty$.

Шаг 1: Если функция z_1 принимает на A счетное число значений, **она локально постоянна.** Если нет, **достаточно доказать, что $z_1(A)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.**

Шаг 2: Будем действовать на $z_1(A)$ подгруппой $G \subset \operatorname{Aut}_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, сохраняющей все коэффициенты многочленов, которые задают A, **и получим всюду плотное в $\mathbb{C}$ множество** (докажите это).

Шаг 3: Проверьте, что $z_1(A)$ G-инвариантно. ■