Алгебраическая геометрия,

лекция 3: сильная теорема Гильберта о нулях

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

16 сентября 2011

Локализация в кольце

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локализацией** кольца R по $F \in R$ называется кольцо $R(F)$, формально порожденное элементами вида a/F^n, где $a \in R$, и с соотношениями $a/F^n \cdot b/F^m = ab/F^{n+m}$, $a/F^n + b/F^m = \frac{aF^m+bF^n}{F^{n+m}}$ и $aF^k/F^{k+n} = a/F^n$.

ПРИМЕР: $\mathbb{Z}(2)$, кольцо рациональных чисел, знаменатели которых – степени двойки.

ПРИМЕР: $\mathbb{C}[t](t)$, кольцо полиномов Лорана.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R – конечно-порожденное кольцо над полем k. **Докажите, что $R(F)$ – тоже конечно-порожденное кольцо.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть F не нильпотент. **Тогда $R(F) \neq 0$.**

Доказательство. Шаг 1: $R(F) = R[t]/(tF-1)$. **Значит, 1=0 даст $-1 = (FT-1)P$, где $P \in R[t]$.**

Шаг 2: Пусть $P = \sum a_i t^i$. Раскрываем скобки, и из $1 = (tF-1)P$ получаем $a_i = a_{i-1}F$, для $i > 0$, и ${}_0 = 1$.

Шаг 3: Следовательно, $P = \sum F^i t^i$, а $F^{n+1} = 0$. ■

Спектр кольца и локализация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спектр** кольца R есть множество $\operatorname{Spec} R$ его простых идеалов.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $R \xrightarrow{\varphi} R_1$ – гомоморфизм колец. **Тогда $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ прост, для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_1$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, если задан морфизм $R \longrightarrow R_1$, **получаем отображение спектров $\operatorname{Spec} R_1 \longrightarrow \operatorname{Spec} R$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Естественное отображение $R \longrightarrow R(f)$ задает вложение спектров, $\operatorname{Spec} R(f) \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $\mathfrak{p}_f, \mathfrak{q}_f \in \operatorname{Spec} R(f)$, а $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ их образы в $\operatorname{Spec} R$, то для любого $p \in \mathfrak{p}_f$, имеем $f^N p \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_f$. ■

Пересечение простых идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Максимальный спектр** кольца R есть множество $\operatorname{Spec}_m R$ его максимальных идеалов.

Теорема Гильберта о нулях: Пусть A – аффинное многообразие, а $\mathcal{O}_A$ его кольцо регулярных функций. Каждый максимальный идеал в $\mathcal{O}_A$ является идеалом всех функций, зануляющихся в какой-то точке $a \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, **теорема Гильберта о нулях отождествляет $\operatorname{Spec}_m \mathcal{O}_A$ и A.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Точки $\operatorname{Spec}_m \mathcal{O}_A(f)$ при этом отождествлении соответствуют точкам A, в которых $f \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нильрадикал** кольца R есть множество $\operatorname{Nil}(R)$ нильпотентных элементов R.

ТЕОРЕМА: Пересечение $P := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$ всех простых идеалов кольца R **равно $\operatorname{Nil}(R)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $P \supset \operatorname{Nil}(R)$ очевидно. Пусть, наоборот, $x \notin \operatorname{Nil}(R)$. Тогда $R(x)$ **содержит простой идеал** (максимальный), и его образ в $\operatorname{Spec} R$ не содержит x. ■

Трюк Рабиновича

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ – идеал в кольце полиномов. **Множество общих нулей** I обозначается за $V(I)$. Идеал всех полиномов, которые зануляются в $Z \subset \mathbb{C}^n$, обозначается I_Z; он называется **аннулятором** Z.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ – идеал, а f – полиномиальная функция, которая зануляется на $V(I)$. **Тогда $f^N \in I$, для какого-то $N \in \mathbb{N}$.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим идеал $I_1 \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_{n+1}]$ порожденный I и $ft_{n+1} - 1$. **Поскольку $ft_{n+1} - 1, I$ не имеют общих нулей, $I_1 \ni 1$.**

Шаг 2: Пусть $R := \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}[t_1, ..., t_{n+1}] \longrightarrow R(f)$, тождественное на $t_1, .., t_n$, и переводящее t_{n+1} в f^{-1}. **Оно сюрьективно**, а поскольку $I_1 \ni 1$ и переходит в 0, **кольцо $R(f)$ нулевое, то есть образ f нильпотентен в R.** ■

СЛЕДСТВИЕ: ("Strong Nullstellensatz") Если в $R := \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$ нет нильпотентов, то $I_{V(I)} = I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in I_{V(I)}$, то $a^n \in I$. ■

Аффинные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебраическое множество** есть множество общих нулей идеала в кольце полиномов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Регулярное (алгебраические) отображение** аффинных многообразий $A, A' \subset \mathbb{C}^n$ есть отображение $\varphi : A \longrightarrow A'$, заданное в координатах набором из n полиномиальных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Категория аффинных многообразий** Aff есть категория, объекты которой суть аффинные многообразия, а морфизмы – регулярные отображения. **Аффинное многообразие** есть объект этой категории, с точностью до изоморфизма (то есть **без фиксированных координат**).

Контравариантные функторы (повторение)

Определение: Если задана категория $\mathcal{C}$, определим **двойственную категорию** $\mathcal{C}^{op}$. Множество объектов в $\mathcal{C}^{op}$ – то же самое, что и в $\mathcal{C}$, а $\mathcal{M}\mathrm{or}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathcal{M}\mathrm{or}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Соответственно, композиция $\varphi \circ \psi$ в $\mathcal{C}$ дает композицию $\psi^{op} \circ \varphi^{op}$ в $\mathcal{C}^{op}$.

Определение: **Контравариантный функтор** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ – это ковариантный функтор из $\mathcal{C}_1^{op}$ в $\mathcal{C}_2$.

Пример: Отображение, ставящее в соответствие топологическому пространству M кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на M – контравариантный функтор из топологических пространств в кольца.

УПРАЖНЕНИЕ: Приведите пример контравариантного функтора.

Изоморфизм и эквивалентность функторов

Определение: Пусть $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Определение: Два функтора $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X : F(X) \longrightarrow G(X)$, причем для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$, имеем $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$.

Замечание: Подобные коммутационные отношения принято изображать **коммутативными диаграммами**. Так, к примеру, условие $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$ можно записать следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\Psi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Эквивалентность категорий

Определение: Функтор $F: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если он задан функтор $G: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ такой, что композиции $G \circ F$ и $G \circ F$ эквивалентны тождественым функторам $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$.

Замечание: Можно проверить, что это равносильно следующему: F задает биекцию на классах изоморфизма объектов, и биекцию

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X), F(Y)).$$

С точки зрения теории категорий, эквивалентные категории неразличимы.

Конечно-порожденные кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$** есть фактор $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ по идеалу. Обозначим за $\mathcal{C}$ категорию конечно-порожденных колец над $\mathbb{C}$, не содержащих нильпотентов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\varphi: A \longrightarrow B$ – гомоморфизм конечно-порожденных колец над $\mathbb{C}$, а $\operatorname{Spec} B \xrightarrow{\hat\varphi} \operatorname{Spec} A$ – индуцированное отображение простых идеалов, $\mathfrak{p} \longrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. **Тогда $\hat\varphi$ переводит максимальные идеалы в максимальные.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **φ индуцирует вложение $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \longrightarrow B/\mathfrak{p}$, тождественное на константах.** Поскольку $B/\mathfrak{p} = \mathbb{C}$ (теорема Гильберта о нулях), **оно сюрьективно.** ■

ТЕОРЕМА: Категория аффинных многообразий Aff **эквивалентна категории $\mathcal{C}^{op}$**.

ВОПРОС: Функтор $\mathrm{Aff} \longrightarrow \mathcal{C}$ есть: аффинное многообразие A переводится в $\mathcal{O}_A$. **Как построить функтор $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Aff}$, переводящий $A = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$ в $V(I)$?**

Морфизмы конечно-порожденных колец и максимальные идеалы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $A, B \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, а $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, B)$ причем $A = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$, а $B = \mathbb{C}[z_1, ..., z_m]/J$. Рассмотрим индуцированное отображение максимальных спектров $\operatorname{Spec}_m B \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \operatorname{Spec}_m A$. Тогда $\widehat{\varphi}$ задается морфизмом аффинных многообразий $\operatorname{Spec}_m A = V(I) \longrightarrow \operatorname{Spec}_m B = V(J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно убедиться, что в координатах t_i, z_i, $\widehat{\varphi}$ задается полиномами. Но для любого полинома $f \in A$ и идеала точки $I_a \in \operatorname{Spec}_m A$, имеем $f(a) = \pi_a(f)$, где $\pi_a : A \longrightarrow A/I_a = \mathbb{C}$ – естественная проекция. Поэтому $\widehat{\varphi}$ **переводит точку с координатами** $(b_1, ..., b_m) \in \mathbb{C}^m$ **в** $(\varphi(t_1)(b_1, ..., b_m), \varphi(t_2)(b_1, ..., b_m), ..., \varphi(t_n)(b_1, ..., b_m)) \in \mathbb{C}^n$**.** ■

Мораль: 1. **Точки** $a \in \operatorname{Spec}_m A$ **отождествляются с сюрьективными гомоморфизмами** $B \xrightarrow{\pi_a} \mathbb{C}$**.** Функция на $\operatorname{Spec}_m A$ регулярна, если она получена из какой-то $f \in A$ как $a \longrightarrow \pi_a(f)$.

2. Отображение $\operatorname{Spec}_m B \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \operatorname{Spec}_m A$ на точках $\operatorname{Spec}_m B$ (отождественных с гомоморфизмами $B \longrightarrow \mathbb{C}$) представляет собой **композицию** φ **с** $B \longrightarrow \mathbb{C}$.

3. **Полиномиальные отображения переводят координаты** t_i **на** $\operatorname{Spec}_m A$ **в регулярные функции** $\varphi(t_i)$ на $\operatorname{Spec}_m B$.

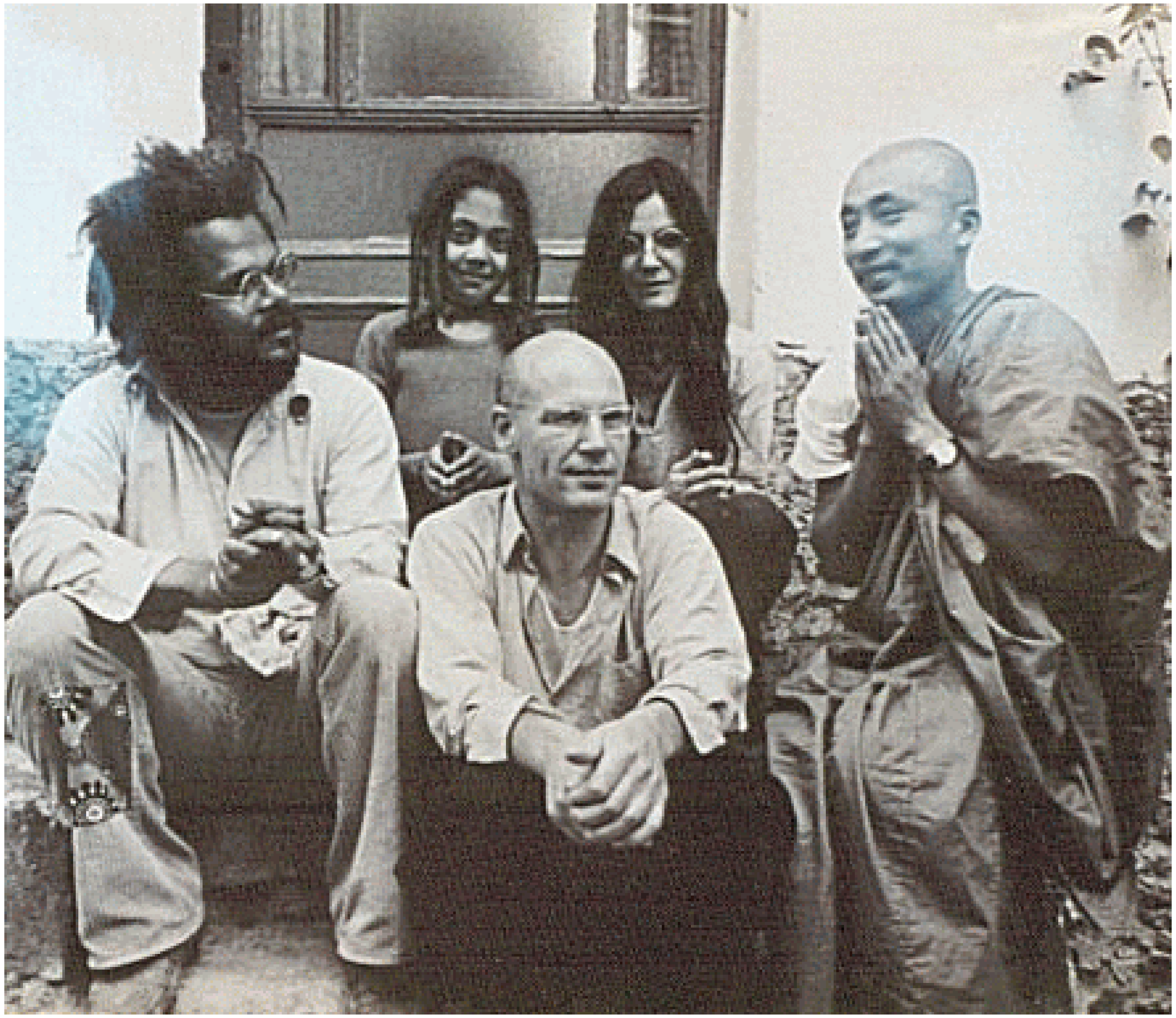
Основная теорема алгебраической геометрии

ТЕОРЕМА: (**"основная теорема алгебраической геометрии"**) Функторы $R \xrightarrow{\Psi} \mathsf{Spec}_m R$ из категории $\mathcal{C}$ конечно-порожденных колец без нильпотентов в аффинные многообразия и $A \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_A$ из аффинных многообразий в $\mathcal{C}$ **взаимно-обратны и задают эквивалентность категорий** Aff **и** $\mathcal{C}^{op}$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По сильной теореме Гильберта о нулях, $I_{V(I)} = I$, что дает $R \cong \Phi(\Psi(R))$. Противоположный изоморфизм $A \cong \Psi(\Phi(A))$ вытекает из $V(I_A) = A$, что следует сразу из определения. ■

Oscar Zariski
(1899 – 1986)

Francesco Severi (1879-1961)



Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)

My feeling is very well expressed when you mention Rip van Winkle!

Siegel to Mordell:
...When I first saw [Lang's Diophantine geometry], about a year ago, I was disgusted with the way in which my own contributions to the subject had been disfigured and made unintelligible. My feeling is very well expressed when you mention Rip van Winkle!

The whole style of the author contradicts the sense for simplicity and honesty which we admire in the works of the masters in number theory - Lagrange, Gauss, or on a smaller scale, Hardy, Landau. Just now Lang has published another book on algebraic numbers which, in my opinion, is still worse than the former one. I see a pig broken into a beautiful garden and rooting up all flowers and trees.

These people remind me of the impudent behaviour of the national socialists who sang: "Wir werden weiter marschieren, bis alles in Scherben zerfallt!"

Timothy Murphy, 2007:
I once heard Mordell reprimand a speaker for using the term "variety" (or it may have been "algebraic variety"):
Mordell, "Do you mean the points satisfying a set of polynomial equations?"
Speaker, "Well ... yes".
Mordell, "Why don't you say so, then."