# Алгебраическая геометрия,

## лекция 4: неприводимые многообразия и нетеровы кольца

Миша Вербицкий

**Матфак ВШЭ, Москва**

**30 сентября 2011**

## Гладкие точки

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество. Точка $a \in A$ называется **гладкой $k$-мерной**, если существует открытая окрестность $A \supset U \ni a$, которая диффеоморфна гладкому многообразию, и диффеоморфизм $U \longrightarrow B \subset \mathbb{C}^k$ на открытый шар $B \subset \mathbb{C}^k$. Точка называется **особой**, или **особенностью**, если такого диффеоморфизма не существует. Многообразие называется **гладким**, если у него нет особенностей, и **особым** в противном случае.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Диффеоморфизм между окрестностью и открытым шаром **всегда можно выбрать полиномиальным.**

**Доказательство. Шаг 1: Теорема об обратной функции:** если $a \in M$ гладкая точка на $k$-мерном многообразии, то любые $k$ функций $f_1, ..., f_k$, таких, что $df_i$ линейно независимы на $T_a M$, **задают систему координат в окрестности $a$.**

**Шаг 2:** Если $a \in A \subset \mathbb{C}^n$ – гладкая, $k$-мерная точка, то **существуют $k$ линейных функции на $\mathbb{C}^n$, которые линейно независимы на $T_a A$.**

**Шаг 3:** Такие функции задают **диффеоморфизм из окрестности $a$ в открытое подмножество $\mathbb{C}^k$.** ■

## Максимальный идеал гладкой точки

**СЛЕДСТВИЕ:** Если линейные функции $f_1, ..., f_k$ линейно независимы в ограничении на $T_a A$ для гладкой точки $a \in A \subset \mathbb{C}^n$, то соответствующая проекция $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$ **задает диффеоморфизм в некоторой окрестности $a \in A$.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Множество гладких точек $A$ открыто.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $m_x$ – максимальный идеал гладкой точки $k$-мерного многообразия, то $\dim_{\mathbb{C}} m_x/m_x^2 = k$**.**

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Многообразие $A \subset \mathbb{C}^2$, заданное уравнением $xy = 0$, **не гладко в точке $a := (0, 0)$.**

**Доказательство. Шаг 1:** $m_a/m_a^2$ есть фактор пространства всех полиномов степени $\geqslant 1$ по всем полиномам степени $\geqslant 2$, **то есть двумерно.**

**Шаг 2:** Значит, если эта точка гладкая, то $A$ было бы двумерно в окрестности (0,0).

**Шаг 3:** Все точки $A$, кроме $a$, гладкие и **$A$ одномерно в их окрестности.**

■

**Нетривиальные (но интуитивно очевидные) утверждения**

**Трудное упражнение:** Докажите, что **множество особых точек аффинного многообразия аффинно.**

**Очень трудное упражнение:** Докажите, что **любое аффинное многообразие содержит гладкую точку.**

**УПРАЖНЕНИЕ:** Выведите из этих утверждений, что **множество гладких точек $A$ плотно в $A$.**

## Неприводимые многообразия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Напомню, что **квазиаффинное многообразие** есть дополнение аффинного до аффинного.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Квазиаффинное многообразие $A$ называется **приводимым**, если оно может быть разбито в объединение $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1, A_2$ – квазиаффинные многообразия, замкнутые в $A$, причем $A_1 \not\subset A_2$ и $A_2 \not\subset A_1$. Если такое разложение невозможно, $A$ называется **неприводимым**.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Аффинное многообразие $A$ **неприводимо** $\Leftrightarrow$ кольцо регулярных функций $\mathcal{O}_A$ **не имеет делителей нуля.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Если $A = A_1 \cup A_2$ – разложение $A$ в объединение подмногообразий, то **есть функция $f$, зануляющаяся на $A_1$ и не зануляющаяся на $A_2$,** и функция $g$, которая наоборот. **Произведение $fg$ равно нулю на $A$.** ■

**УПРАЖНЕНИЕ:** Докажите, что многообразие, которое гладко и связно, **обязательно неприводимо.**

## Плотные подмножества неприводимых многообразий

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $A$ – неприводимое квазиаффинное многообразие, плотное в аффинном многообразии $B$. Тогда **$B$ неприводимо $\Leftrightarrow$ $A$ неприводимо.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Если $A = A_1 \cup A_2$, то $B$ есть замыкание их объединений. Наоборот, если $B = B_2 \cup B_2$, то $A = (A \cap B_1) \cup (A \cup B_2)$. ■

**СЛЕДСТВИЕ:** Пусть $A$ – аффинное многообразие, **множество $A_0$ гладких точек которого плотно в $A$ и связно. Тогда $A$ неприводимо.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Если есть ненулевые функции $f$ и $g$, такие, что $fg = 0$, то кольцо полиномиальных функций на $A_0$ содержит делители нуля. **Это невозможно, потому что $A_0$ гладко и связно.** ■

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, причем $X$ неприводимо, а его образ в $Y$ плотен. **Докажите, что $Y$ тоже неприводимо.**

## Нетеровость колец и неприводимые компоненты

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Кольцо называется **нетеровым**, если любая возрастающая цепочка вложенных друг в друга идеалов обрывается.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Неприводимая компонента** алгебраического множества $A$ есть неприводимое подмножество $A' \subset A$ такое, что $A = A' \cup A''$, причем $A' \not\subset A''$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ последовательность убывающих алгебраических подмножеств в аффинном многообразии. **Тогда соответствующие идеалы образуют возрастающую цепочку идеалов.**

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $A$ – аффинное многообразие, $A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_A$, причем $\mathcal{O}_A$ нетерово. Тогда $A$ **есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** См. следующий слайд.

## Нетеровость колец и неприводимые компоненты (продолжение)

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $A$ – аффинное многообразие, $A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_A$, причем $\mathcal{O}_A$ нетерово. Тогда $A$ **есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.**

**Доказательство. Шаг 1:** Каждая точка $a \in A$ лежит в какой-то неприводимой компоненте. В самом деле, если такой компоненты нет, то для каждого разбиения $A = A_1 \cup A_2$, подмножество $A_i$, содержащее $a$, может быть снова разбито в объединение замкнутых подмножеств, и так до бесконечности. Это дает строго убывающую бесконечную последовательность аффинных подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ Но **тогда соответствующая последовательность идеалов не обрывается.**

**Шаг 2:** Число неприводимых компонент конечно. Пусть их бесконечно, $A = \bigcup_i A_i$. Поскольку $A = A_i \cup A_i'$, **дополнение $A \backslash A_i$ содержится в аффинном подмножестве $A$, которое не содержит $A_i$.**

**Шаг 3:** Обозначим за $B_n$ минимальное аффинное подмножество $A$, которое содержит $A \backslash A_n$. В силу предыдущего шага, **последовательность**

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

**строго убывает,** что снова дает строго возрастающую последовательность идеалов. ■

## Нетеровы кольца

**ТЕОРЕМА: (теорема Гильберта о базисе) Любое конечно порожденное кольцо над $\mathbb{C}$ нетерово.**

**СЛЕДСТВИЕ:** Для любого аффинного многообразия $A$, $A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_A$, **кольцо $\mathcal{O}_A$ нетерово.**

**ЗАМЕЧАНИЕ: Достаточно доказать теорему Гильберта для кольца полиномов.** В самом деле, любое конечно порожденное кольцо является фактором кольца полиномов, но **множество идеалов фактор-кольца $R/I$ инъективно отображается в множество идеалов $R$.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Для этого достаточно доказать, что $R[t]$ **нетерово для любого нетерова кольца $R$.**

**УПРАЖНЕНИЕ: Приведите пример колец, которые не нетеровы.**

## Конечно порожденные идеалы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Конечно порожденный идеал в кольце** есть идеал $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ линейных комбинаций вида $\sum b_i a_i$, где $a_i$ – фиксированный набор элементов, которые называются **образующими** идеала.

**ЛЕММА:** Пусть $I \subset R$ – конечно порожденный идеал, а $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ...$ – цепочка вложенных идеалов, таких, что $\bigcup_n I_n = I$. **Тогда эта цепочка обрывается.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Пусть $I = \langle a_1, ..., a_n\rangle$, а $I_N$ – **такой идеал в цепочке $I_n$, который содержит все $a_i$.** Тогда $I_N = I$. ■

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **(Кольцо $R$ нетерово) $\Leftrightarrow$ (все идеалы в $R$ конечно порождены).**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Если $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ...$ цепочка идеалов, а $I$ ее объединение, то **из конечной порожденности $I$ следует обрыв цепочки** в силу леммы.

Наоборот, если $R$ нетерово, а $I$ – идеал, возьмем идеал $I_0 = 0$, а $I_{n+1}$ сделаем из $I_n$, добавив к $I_n$ элемент, лежащий в $I$ и не лежащий в $I_n$. **Поскольку эта цепочка обрывается, $I = I_N$.** ■

## Нетеровы модули

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Модуль $M$ над кольцом называется **нетеровым**, если любая возрастающая цепочка подмодулей $M$ обрывается.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Любые подмодули и фактормодули нетерова $R$-модуля снова нетеровы. **Прямые суммы нетеровых модулей тоже нетеровы.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Конечно порожденный $R$-модуль** есть фактормодуль $R^n$ по какому-то подмодулю.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Любой нетеров модуль **конечно порожден.**

**ЛЕММА:** Кольцо $R$ является нетеровым, если оно нетерово как $R$-модуль.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** **Идеалы в $R$ – это то же самое, что $R$-подмодули.** ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $M$ – модуль над $R[t]$, который нетеров как $R$-модуль, то **он нетеров как $R[t]$-модуль.**

**СЛЕДСТВИЕ:** Если $R$ нетерово, то $R[t]/(t^N)$ есть нетеров $R$-модуль, а значит, **кольцо $R[t]/(t^N)$ нетерово.**

## Доказательство теоремы Гильберта о базисе.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Если $R$ – нетерово кольцо, то $R[t]$ **тоже нетерово.**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $I \subset R[t]$ идеал. Мы докажем, что $I$ конечно порожден. Рассмотрим идеал $I_0 \subset R$, порожденный старшими коэффициентами всех полиномов из $I$. Поскольку $R$ нетерово, любая цепочка идеалов, содержащихся в $I$, обрывается. Значит, $I_0$ **порождено** $a_1, ..., a_n$**, где все** $a_i$ **– старшие коэффициенты полиномов** $P_i(t) \in I$**.**

**Шаг 2:** Пусть $N$ – наибольшая степень $P_i(t)$. Для каждого $Q(t) \in I$ со старшим коэффициентом $\sum a_i b_i$, **существует полином** $P_Q(t)$ **степени не больше** $N$ **с тем же старшим коэффициентом**, $P_Q(T) = \sum_i P_i(t) b_i t^{N - \deg P_i}$.

**Шаг 3:** Обозначим за $\tilde{Q}(t)$ остаток от деления в столбик $Q(t)$ на $P_Q(t)$. **Тогда** $\tilde{Q}(t) = Q(t) \mod \langle P_1(t), ..., P_n(t)\rangle$**, а** $\deg \tilde{Q}(t) < N$**.**

**Шаг 4:** Мы построили вложение $R$-модулей $I/\langle P_1(t), ..., P_n(t) \longrightarrow R[t]/(t^N)$. **Поэтому модуль** $I/\langle P_1(t), ..., P_n(t)\rangle$ **нетеров, значит, конечно порожден.**

**Шаг 5:** Выберем полиномы $Q_1(t), ..., Q_m(t) \in I$, которые порождают $I/\langle P_1(t), ..., P_n(t)\rangle$. **Тогда** $Q_i(t), P_i(t)$ **порождают** $I$**.** ∎

## Техническое объявление

В следующую пятницу (7-го октября), пожалуйста, принесите мне свои ведомости для ксерокопирования, либо сами скопируйте и принесите копии. Через пятницу (14-го) будет контрольная: каждому выдается по $(3+t)$ задачи, где $t = [(40-b)/10]$, а $b$ - суммарное количество баллов 7-го октября (за листки и первое домашнее задание). Оценка за контрольную **зависит от процента решенных задач.**


Emmy Noether

by Mary Fleener