

Алгебраическая геометрия,

лекция 4: неприводимые многообразия и нетеровы кольца

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

30 сентября 2011

Гладкие точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество. Точка $a \in A$ называется **гладкой k -мерной**, если существует открытая окрестность $A \supset U \ni a$, которая диффеоморфна гладкому многообразию, и диффеоморфизм $U \rightarrow V \subset \mathbb{C}^k$ на открытый шар $V \subset \mathbb{C}^k$. Точка называется **особой**, или **особенностью**, если такого диффеоморфизма не существует. Многообразию называется **гладким**, если у него нет особенностей, и **особым** в противном случае.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Диффеоморфизм между окрестностью и открытым шаром **всегда можно выбрать полиномиальным**.

Доказательство. Шаг 1: Теорема об обратной функции: если $a \in M$ гладкая точка на k -мерном многообразии, то любые k функций f_1, \dots, f_k , таких, что df_i линейно независимы на $T_a M$, **задают систему координат в окрестности a** .

Шаг 2: Если $a \in A \subset \mathbb{C}^n$ – гладкая, k -мерная точка, то **существуют k линейных функции на \mathbb{C}^n , которые линейно независимы на $T_a A$** .

Шаг 3: Такие функции задают **диффеоморфизм из окрестности a в открытое подмножество \mathbb{C}^k** . ■

Максимальный идеал гладкой точки

СЛЕДСТВИЕ: Если линейные функции f_1, \dots, f_k линейно независимы в ограничении на $T_a A$ для гладкой точки $a \in A \subset \mathbb{C}^n$, то соответствующая проекция $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ **задает диффеоморфизм в некоторой окрестности $a \in A$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Множество гладких точек A открыто.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если m_x – максимальный идеал гладкой точки k -мерного многообразия, то $\dim_{\mathbb{C}} m_x/m_x^2 = k$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Многообразию $A \subset \mathbb{C}^2$, заданное уравнением $xy = 0$, **не гладко в точке $a := (0, 0)$.**

Доказательство. Шаг 1: m_a/m_a^2 есть фактор пространства всех полиномов степени ≥ 1 по всем полиномам степени ≥ 2 , **то есть двумерно.**

Шаг 2: Значит, если эта точка гладкая, то A было бы двумерно в окрестности $(0,0)$.

Шаг 3: Все точки A , кроме a , гладкие и **A одномерно в их окрестности.**

■

Нетривиальные (но интуитивно очевидные) утверждения

Трудное упражнение: Докажите, что множество особых точек аффинного многообразия аффинно.

Очень трудное упражнение: Докажите, что любое аффинное многообразие содержит гладкую точку.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите из этих утверждений, что множество гладких точек A плотно в A .

Неприводимые многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что **квазиаффинное многообразие** есть дополнение аффинного до аффинного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квазиаффинное многообразие A называется **приводимым**, если оно может быть разбито в объединение $A = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 – квазиаффинные многообразия, замкнутые в A , причем $A_1 \not\subset A_2$ и $A_2 \not\subset A_1$. Если такое разложение невозможно, A называется **неприводимым**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Аффинное многообразие A **неприводимо** \Leftrightarrow кольцо регулярных функций \mathcal{O}_A **не имеет делителей нуля**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $A = A_1 \cup A_2$ – разложение A в объединение подмногообразий, то **есть функция f , зануляющаяся на A_1 и не зануляющаяся на A_2** , и функция g , которая наоборот. **Произведение fg равно нулю на A .** ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что многообразие, которое гладко и связно, **обязательно неприводимо**.

Плотные подмножества неприводимых многообразий

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – неприводимое квазиаффинное многообразие, плотное в аффинном многообразии B . Тогда B неприводимо $\Leftrightarrow A$ неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $A = A_1 \cup A_2$, то B есть замыкание их объединений. Наоборот, если $B = B_1 \cup B_2$, то $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, множество A_0 гладких точек которого плотно в A и связно. Тогда A неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если есть ненулевые функции f и g , такие, что $fg = 0$, то кольцо полиномиальных функций на A_0 содержит делители нуля. Это невозможно, потому что A_0 гладко и связно. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X \rightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, причем X неприводимо, а его образ в Y плотен. Докажите, что Y тоже неприводимо.

Нетеровость колец и неприводимые компоненты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **нетеровым**, если любая возрастающая цепочка вложенных друг в друга идеалов обрывается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Неприводимая компонента** алгебраического множества A есть неприводимое подмножество $A' \subset A$ такое, что $A = A' \cup A''$, причем $A' \not\subset A''$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ последовательность убывающих алгебраических подмножеств в аффинном многообразии. **Тогда соответствующие идеалы образуют возрастающую цепочку идеалов.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, $A = \text{Spec } \mathcal{O}_A$, причем \mathcal{O}_A нетерово. Тогда **A есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

Нетеровость колец и неприводимые компоненты (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – аффинное многообразие, $A = \text{Spec } \mathcal{O}_A$, причем \mathcal{O}_A нетерово. Тогда A есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.

Доказательство. Шаг 1: Каждая точка $a \in A$ лежит в какой-то неприводимой компоненте. В самом деле, если такой компоненты нет, то для каждого разбиения $A = A_1 \cup A_2$, подмножество A_i , содержащее a , может быть снова разбито в объединение замкнутых подмножеств, и так до бесконечности. Это дает строго убывающую бесконечную последовательность аффинных подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Но тогда соответствующая последовательность идеалов не обрывается.

Шаг 2: Число неприводимых компонент конечно. Пусть их бесконечно, $A = \bigcup_i A_i$. Поскольку $A = A_i \cup A'_i$, дополнение $A \setminus A_i$ содержится в аффинном подмножестве A , которое не содержит A_i .

Шаг 3: Обозначим за B_n минимальное аффинное подмножество A , которое содержит $A \setminus A_n$. В силу предыдущего шага, последовательность

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

строго убывает, что снова дает строго возрастающую последовательность идеалов. ■

Нетеровы кольца

ТЕОРЕМА: (теорема Гильберта о базисе) Любое конечно порожденное кольцо над \mathbb{C} нетерово.

СЛЕДСТВИЕ: Для любого аффинного многообразия A , $A = \text{Spec } \mathcal{O}_A$, кольцо \mathcal{O}_A нетерово.

ЗАМЕЧАНИЕ: Достаточно доказать теорему Гильберта для кольца полиномов. В самом деле, любое конечно порожденное кольцо является фактором кольца полиномов, но множество идеалов факторкольца R/I инъективно отображается в множество идеалов R .

ЗАМЕЧАНИЕ: Для этого достаточно доказать, что $R[t]$ нетерово для любого нетерова кольца R .

УПРАЖНЕНИЕ: Приведите пример колец, которые не нетеровы.

Конечно порожденные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно порожденный идеал в кольце есть идеал $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейных комбинаций вида $\sum b_i a_i$, где a_i – фиксированный набор элементов, которые называются **образующими** идеала.

ЛЕММА: Пусть $I \subset R$ – конечно порожденный идеал, а $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ – цепочка вложенных идеалов, таких, что $\bigcup_n I_n = I$. **Тогда эта цепочка обрывается.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а I_N – такой идеал в цепочке I_n , который содержит все a_i . Тогда $I_N = I$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Кольцо R нетерово) \Leftrightarrow (все идеалы в R конечно порождены).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ цепочка идеалов, а I ее объединение, то **из конечной порожденности I следует обрыв цепочки** в силу леммы.

Наоборот, если R нетерово, а I – идеал, возьмем идеал $I_0 = 0$, а I_{n+1} сделаем из I_n , добавив к I_n элемент, лежащий в I и не лежащий в I_n . **Поскольку эта цепочка обрывается, $I = I_N$.** ■

Нетеровы модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль M над кольцом называется **нетеровым**, если любая возрастающая цепочка подмодулей M обрывается.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любые подмодули и фактормодули нетерова R -модуля снова нетеровы. **Прямые суммы нетеровых модулей тоже нетеровы.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечно порожденный R -модуль** есть фактормодуль R^n по какому-то подмодулю.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой нетеров модуль **конечно порожден.**

ЛЕММА: Кольцо R является нетеровым, если оно нетерово как R -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Идеалы в R – это то же самое, что R -подмодули. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Если M – модуль над $R[t]$, который нетеров как R -модуль, то **он нетеров как $R[t]$ -модуль.**

СЛЕДСТВИЕ: Если R нетерово, то $R[t]/(t^N)$ есть нетеров R -модуль, а значит, **кольцо $R[t]/(t^N)$ нетерово.**

Доказательство теоремы Гильберта о базисе.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если R – нетерово кольцо, то $R[t]$ **тоже нетерово.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $I \subset R[t]$ идеал. Мы докажем, что I конечно порожден. Рассмотрим идеал $I_0 \subset R$, порожденный старшими коэффициентами всех полиномов из I . Поскольку R нетерово, любая цепочка идеалов, содержащихся в I , обрывается. Значит, I_0 **порождено** a_1, \dots, a_n , где все a_i – старшие коэффициенты полиномов $P_i(t) \in I$.

Шаг 2: Пусть N – наибольшая степень $P_i(t)$. Для каждого $Q(t) \in I$ со старшим коэффициентом $\sum a_i b_i$, **существует полином $P_Q(t)$ степени не больше N с тем же старшим коэффициентом**, $P_Q(t) = \sum_i P_i(t) b_i t^{N - \deg P_i}$.

Шаг 3: Обозначим за $\tilde{Q}(t)$ остаток от деления в столбик $Q(t)$ на $P_Q(t)$. Тогда $\tilde{Q}(t) = Q(t) \bmod \langle P_1(t), \dots, P_n(t) \rangle$, а $\deg \tilde{Q}(t) < N$.

Шаг 4: Мы построили вложение R -модулей $I / \langle P_1(t), \dots, P_n(t) \rangle \longrightarrow R[t] / (t^N)$. Поэтому модуль $I / \langle P_1(t), \dots, P_n(t) \rangle$ нетеров, значит, конечно порожден.

Шаг 5: Выберем полиномы $Q_1(t), \dots, Q_m(t) \in I$, которые порождают $I / \langle P_1(t), \dots, P_n(t) \rangle$. Тогда $Q_i(t), P_i(t)$ порождают I . ■

Техническое объявление

В следующую пятницу (7-го октября), пожалуйста, принесите мне свои ведомости для ксерокопирования, либо сами скопируйте и принесите копии. Через пятницу (14-го) будет контрольная: каждому выдается по $(3 + t)$ задачи, где $t = [(40 - b)/10]$, а b - суммарное количество баллов 7-го октября (за листки и первое домашнее задание). Оценка за контрольную **зависит от процента решенных задач.**



Emmy Noether
by Mary Fleener