Алгебраическая геометрия,

лекция 5: теорема Эмми Нетер

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

7 октября 2011

Техническое объявление

Сегодня, пожалуйста, принесите мне свои ведомости для ксерокопирования, либо сами скопируйте и принесите копии. Отметьте на копиях, сколько баллов вам причитается. В следующую пятницу (14-го) будет контрольная: каждому выдается по $(3+t)$ задачи, где $t = [(40-b)/10]$, а b - суммарное количество баллов 7-го октября (за листки и первое домашнее задание). Оценка за контрольную **зависит от процента решенных задач.**

Зачет случится 28-го октября. К этому дню надо иметь (суммарно) 45 баллов за сдачу листочков, контрольную и первое домашнее задание.

Результаты первого домашнего задания доступны на страничке курса:

`http://bogomolov-lab.ru/KURSY/AG-2011/`

туда же будут выкладываться результаты контрольной и вся собранная мною информация по успехам студентов.

21 и 28-го октября вместо лекций будет сдача задач.

Неприводимые многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое подмножество. Точка $a \in A$ называется **гладкой k-мерной**, если существует открытая окрестность $A \supset U \ni a$, которая диффеоморфна гладкому многообразию, и диффеоморфизм $U \longrightarrow B \subset \mathbb{C}^k$ на открытый шар $B \subset \mathbb{C}^k$. Точка называется **особой**, или **особенностью**, если такого диффеоморфизма не существует. Многообразие называется **гладким**, если у него нет особенностей, и **особым** в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Аффинное многообразие A называется **приводимым**, если оно может быть разбито в объединение $A = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 – аффинные многообразия, причем $A_1 \not\subset A_2$ и $A_2 \not\subset A_1$. Если такое разложение невозможно, A называется **неприводимым**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Аффинное многообразие A **неприводимо** $\Leftrightarrow$ кольцо регулярных функций $\mathcal{O}_A$ **не имеет делителей нуля.**

Неприводимость гладкого многообразия

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть множество A_0 гладких точек аффинного многообразия A связно и плотно в A. **Тогда A неприводимо.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f \in \mathcal{O}_A$ ненулевая регулярная функция, а D_f – множество, где $f = 0$. Поскольку A_0 гладко и связно, в любой точке A_0 ряд Тэйлора f ненулевой (проверьте это). **Значит, внутренность D_f - пустое множество**.

Шаг 2: Из этого следует, что **дополнение к D_f плотно в A.**

Шаг 3: Если $fg = 0$, то $D_f \cup D_g = A$. Следовательно, **D_f плотно в A.** Но поскольку D_f замкнуто, **из этого вытекает, что $D_f = A$.** ■

Представления конечных групп

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Представление группы G есть гомоморфизм $G \longrightarrow GL(V)$. В этом случае V называется **пространством представления**, или **представлением**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Неприводимое представление группы G есть представление, у которого нет нетривиальных G-инвариантных подпространств. **Полупростое представление** есть прямая сумма неприводимых.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если G действует на V, то G действует на любых тензорных степенях V (действие продолжается мультипликативно). В частности, **G действует на $V^* \otimes V^*$, по формуле $g(h(x,y)) = h(g(x), g(y))$**, где $g \in G, h \in V^* \otimes V^*, x, y \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика h (евклидова или эрмитова) на V называется **G-инвариантной**, если соответствующий тензор $h \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} V^*$ G-инвариантен.

G-инвариантные метрики

УТВЕРЖДЕНИЕ: Сумма эрмитовых метрик эрмитова. Сумма евклидовых метрик – евклидова метрика.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть V – представление конечной группы (над $\mathbb{C}$ или над $\mathbb{R}$). **Тогда V допускает G-инвариантную метрику** (эрмитову или евклидову).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть h – произвольная метрика, а $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(h)$ ее усреднение по G. В силу предыдущего утверждения, это метрика, а в силу того, что G **действует на себе биекциями** - инвариантная. ■

СЛЕДСТВИЕ: Если $W \subset V$ подпредставление в представлении конечной группы G над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то V **можно разложить в прямую сумму $V = W \oplus W'$, причем W' G-инвариантно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем на V G-инвариантную метрику. Тогда **ортогональное дополнение к W тоже G-инвариантно** (проверьте это). Это дает $V = W \oplus W^\perp$. ■

СЛЕДСТВИЕ: **Каждое конечномерное представление конечной группы вполне приводимо.** ■

Инварианты и коинварианты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – конечная группа, действующая не векторном пространстве V. Определим **пространство G-инвариантов** V^G как пространство всех G-инвариантных векторов V, а **пространство коинвариантов** V_G как фактор V по подпространству, порожденному векторами вида $v - g(v)$, где $g \in G, v \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функтор $A \longrightarrow FA$ на категории R-модулей или векторных пространств называется **точным слева**, если любая точная последовательность $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ переводится в точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC,$$

и **точным справа**, если она переводится в точную последовательность вида

$$FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0.$$

Функтор называется **точным**, если последовательность

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$$

точна.

Отображение усреднения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для нетривиального неприводимого представления V, инварианты и коинварианты равны нулю. Для тривиального, они равны V.

СЛЕДСТВИЕ: Если V – полупростое представление, **то $V_G = V^G$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **функтор инвариантов точен слева, а функтор коинвариантов точен справа.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ – точная последовательность полупростых представлений. Тогда **последовательности $0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow 0$ и $0 \longrightarrow A_G \longrightarrow B_G \longrightarrow C_G \longrightarrow 0$ тоже точны.**

СЛЕДСТВИЕ: Если G – конечная группа, то **функтор инвариантов точен**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Отображение усреднения по действию G**

$$m \longrightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(m)$$

проектирует представление V на V^G, причем ядро этого отображения есть ядро естественной проекции $V \longrightarrow V_G$.

Аффинные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R есть конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, $R := \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$. **Аффинное многообразие** есть множество $V(I)$ общих нулей идеала I в $\mathbb{C}^n$. Оно обозначается $\operatorname{Spec}_m R$. Здесь Spec_m обозначает **максимальный спектр кольца**, то есть множество максимальных идеалов в R.

ЗАМЕЧАНИЕ: По теореме Гильберта о нулях, **точки $V(I)$ взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам R.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Регулярная функция** на аффинном многообразии есть полиномиальная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных многообразий есть отображение $X \longrightarrow Y$, заданное полиномами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Изоморфизм** аффинных многообразий есть морфизм, который обратим справа и слева.

ЗАМЕЧАНИЕ: По теореме Гильберта о нулях, **аффиные многообразия изоморфны тогда и только тогда, когда их кольца регулярных функций изоморфны.**

Кольцо инвариантов и факторпространство

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Действие группы G на аффинном многообразии A есть действие G на кольце $\mathcal{O}_A$ регулярных функций на A.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что действие G на A автоморфизмами.

ЗАМЕЧАНИЕ: Хочется определить A/G как спектр кольца инвариантов $\mathcal{O}_A^G$.

Трудность 1: Надо доказать, что $\mathcal{O}_A^G$ конечно порождено (теорема Нетер).

Трудность 2: Надо отождествить максимальные идеалы в $\mathcal{O}_A^G$ с элементами факторомножества A/G.

Теорема Нетер (схема доказательства)

ТЕОРЕМА: Пусть R – конечно-порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, G – конечная группа, действующая на R автоморфизмами. Тогда **кольцо инвариантов R^G конечно порождено.**

Схема доказательства:

1. Из нетеровости R выводим нетеровость R^G.

2. Доказываем конечно-порожденность R^G для $R = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, где G действует на полиномах степени 1 линейными автоморфизмами.

3. Выводим из точности функтора $V \longrightarrow V^G$ общий случай.

Нетеровы кольца (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **нетеровым**, если любая возрастающая цепочка вложенных друг в друга идеалов обрывается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечно порожденный идеал в кольце** есть идеал $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ линейных комбинаций вида $\sum b_i a_i$, где a_i – фиксированный набор элементов, которые называются **образующими** идеала.

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Кольцо R нетерово) $\Leftrightarrow$ (все идеалы в R конечно порождены).

ТЕОРЕМА: (теорема Гильберта о базисе) Любое конечно порожденное кольцо над $\mathbb{C}$ нетерово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Была доказана на прошлой лекции. ■

Идеалы в R и в R^G

ЛЕММА: Пусть R – кольцо, снабженное действием группы, R^G – кольцо G-инвариантов, а $I \subset R^G$ идеал. Тогда **идеал RI удовлетворяет $\operatorname{Av}_G(RI) = \operatorname{Av}_G(R)I = R^G I = I$,** где $\operatorname{Av}_G : R \longrightarrow R^G$ – отображение усреднения по группе. ■

СЛЕДСТВИЕ: Если $I_1 \subsetneq I$ – строго вложенные идеалы в R^G, то $RI_1 \subsetneq RI$ тоже строго вложенные идеалы.

СЛЕДСТВИЕ: **Если R нетерово, то R^G тоже нетерово.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждая бесконечная, строго возрастающая цепочка идеалов $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots$ в R^G даст строго возрастающую цепочку идеалов $RI_0 \subsetneq RI_1 \subsetneq \ldots$ в R. ■

Градуированные кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное кольцо** есть кольцо A^* вида $A^* = \bigoplus_{i=0}^\infty A^i$, где умножение удовлетворяет закону $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$. Градуированное кольцо называется кольцом **конечного типа**, если все A^i конечномерны.

ПРИМЕР: Кольцо полиномов $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_i \operatorname{Sym}^i V$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A^* – градуированное кольцо конечного типа. **A^* нетерово $\Leftrightarrow$ оно конечно порождено.**

Доказательство. Шаг 1: Нетеровость A^* следует из конечно-порожденности A^* по теореме Гильберта о базисе.

Шаг 2: Если A^* нетерово, то **идеал $\bigoplus_{i>0} A^i \subset A^*$ конечно-порожден.** Выберем конечный набор образующих $a_i \in A^{n_i}$. Я докажу, что их произведения порождают A^*.

Шаг 3: Пусть $z \in A^N$ – элемент наименьшей градуировки, который не порожден a_i. Поскольку a_i порождают идеал $\bigoplus_{i>0} A^i \subset A^*$, $z = \sum_i f_i a_i$, где $f_i \in A^*$. Но $\deg f_i < \deg z$, потому что $a_i \in \bigoplus_{i>0} A^i \subset A^*$. **Значит, f_i порождены произведениями a_i.** ■

Доказательство теоремы Нетер для полиномиальных инвариантов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – векторное пространство с базисом $z_1, ..., z_n$, $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_i \operatorname{Sym}^i V = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ – соответствующее кольцо полиномов. Предположим, что на V задано действие G линейными автоморфизмами. Это действие продолжается мультипликативно на все тензорные степени V, и в том числа на $\bigoplus_i \operatorname{Sym}^i V$. Поэтому **группа G действует на $\mathbb{C}[V]$ автоморфизмами.** Такое действие G на $\mathbb{C}[V]$ называется **линейным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
(Теорема Нетер для полиномиальных инвариантов)
Пусть задано линейное действие G на $\mathbb{C}[V]$. Тогда кольцо инвариантов $\mathbb{C}[V]^G$ конечно порождено.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку действие G сохраняет градуировку на $\mathbb{C}[V]$, **кольцо $\mathbb{C}[V]^G$ – градуированное и конечного типа.**

Шаг 2: **$\mathbb{C}[V]^G$ нетерово,** так как $\mathbb{C}[V]$ нетерово, а кольца инвариантов нетеровы.

Шаг 2: Градуировка конечного типа вместе с нетеровостью влечет конечно-порожденность. ■

Теорема Нетер

ТЕОРЕМА: (Теорема Нетер)
Пусть R – конечно порожденное кольцо над $\mathbb{C}$, а G – конечная группа, действующая на R автоморфизмами. **Тогда R^G конечно порождено.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f_1, ..., f_m$ – образующие R, а $\{g_1, ..., g_k\} = G$. Рассмотрим пространство $V \subset R$, порожденное векторами вида $g_i f_k$. Тогда V снабжено линейным действием G, и **гомоморфизм $\mathbb{C}[V] \longrightarrow R = \mathbb{C}[V]/I$ сюрьективен и G-инвариантен**.

Шаг 2: Отображение $\mathbb{C}[V]^G \longrightarrow R^G$ сюрьективно, потому что функтор инвариантов точен.

Шаг 3: По теореме Нетер для полиномиальных инвариантов, **$\mathbb{C}[V]^G$ конечно порождено.** ■