Алгебраическая геометрия,

лекция 6: тензорные произведения модулей

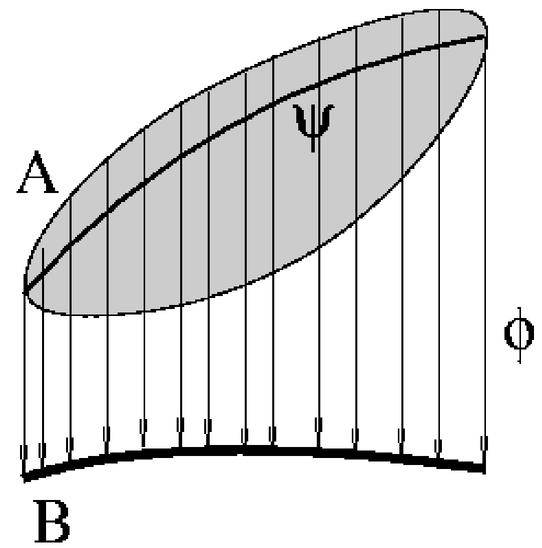
Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

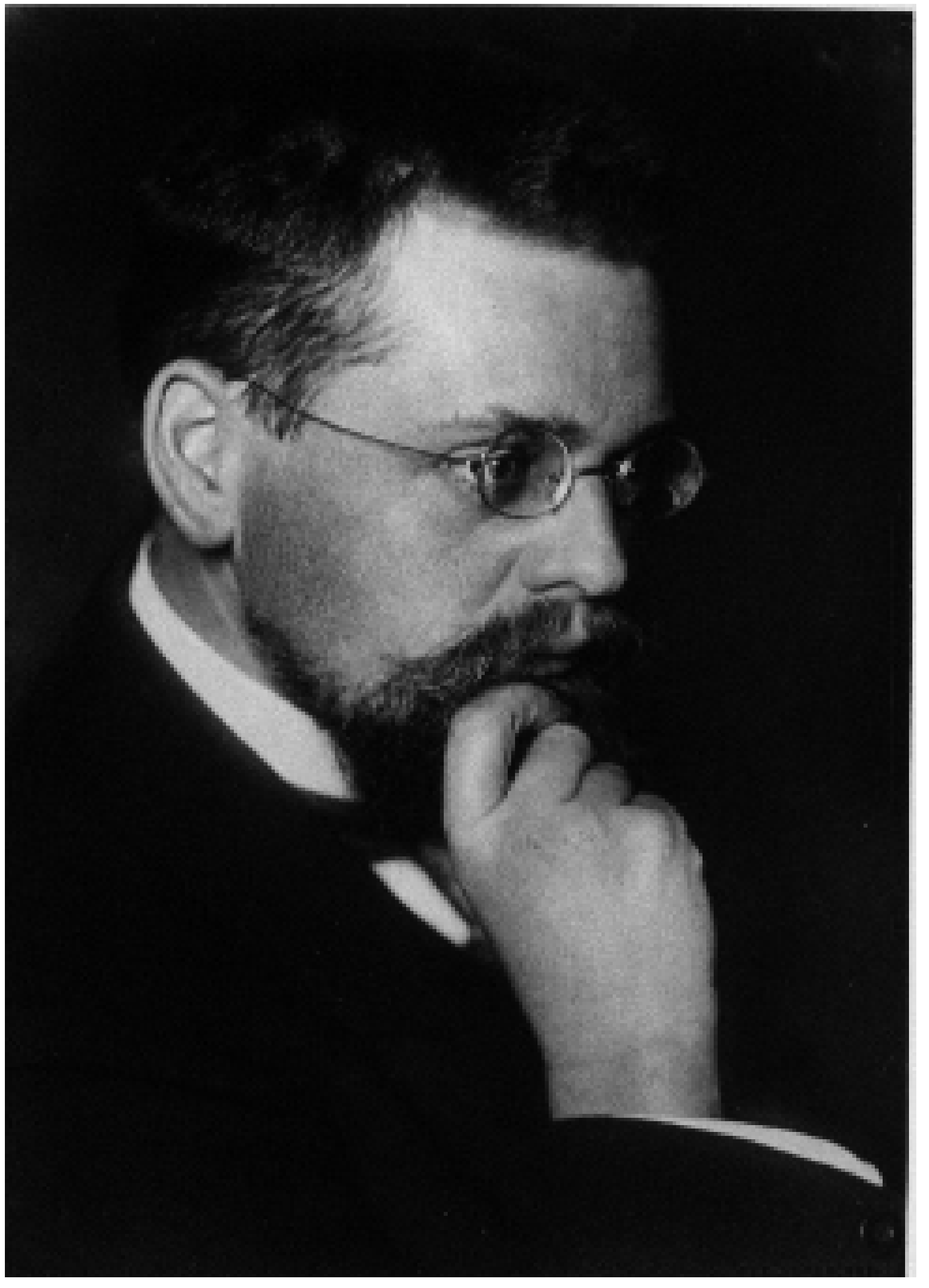
11 ноября 2011

Отступление: ординалы, аксиома выбора, континуум-гипотеза

Пусть $\varphi: A \longrightarrow B$ – сюрьективное отображение множеств. **Сечением** отображения φ называется отображение $\psi: B \longrightarrow A$, такое, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$.



Аксиома выбора утверждает, что каждое сюрьективное отображение имеет сечение



Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
(1871 - 1953)

Вполне упорядоченные множества

Определение: Пусть $(X, \prec)$ – линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ – его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется **минимальным**, если для любого $y \in Y$, имеем $y_0 \preccurlyeq y$. Линейно упорядоченное множество называется **вполне упорядоченным**, если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется **отношение полного порядка**.

Определение: **Начальным элементом** вполне упорядоченного множества называется его минимальный элемент. **Отрезком** линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется подмножество $Y \subset X$ такое, что для любых $x, z \in Y$, и любого $y \in X$ такого, что $x \prec y \prec z$, имеем $y \in Y$. **Начальным отрезком** вполне упорядоченного множества называется отрезок, содержащий минимальный элемент.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(1845 - 1918)

Сравнение ординалов

Определение: Два вполне упорядоченных множества называются **изоморфными**, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются **ординалами**, или же **ординальными числами**.

Теорема: Пусть X, Y – вполне упорядоченные множества. **Тогда X изоморфно начальному отрезку Y, либо Y изоморфно начальному отрезку X.** Более того, такой изоморфизм определен однозначно.

Доказательство теоремы о сравнении ординалов. Пусть Z – множество пар (X_1, Y_1) изоморфных начальных отрезков X и Y.

Шаг 1: Изоморфизм начальных отрезков (X_1, Y_1) определяется однозначно множеством X_1. В самом деле, пусть существует два различных вложения $\varphi: X_1 \longrightarrow Y$ и $\varphi': X_1 \longrightarrow Y$, задающие изоморфизм X_1 и начального отрезка Y. Обозначим за x минимальный элемент X_1, такой, что $\varphi(x) \neq \varphi'(x)$. Тогда $\varphi\big|_{[x_0,x[} = \varphi'\big|_{[x_0,x[}$, следовательно, $\varphi(x) = \varphi'(x)$.

Сравнение ординалов (продолжение)

Шаг 2: Мы получили, что Z упорядочено по включению, и это отношение задает на Z полный порядок. Пусть x – минимальный элемент X, не принадлежащий X_1 для какого-то $(X_1, Y_1) \in Z$. Если такого нет, это значит, что X изоморфен начальному отрезку Y. Если $Y_1 = Y$, мы все доказали. В противном случае, начальный отрезок $[x_0, x[$ изоморфен начальному отрезку $[y_0, y[$, следовательно, отрезок $[x_0, x]$ изоморфен $[y_0, y]$. Мы пришли к противоречию! ■

Замечание: Эта теорема определяет порядок на ординалах: один ординал меньше другого, если первый изоморфен отрезку второго.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА: (23-я проблема Гильберта)
Докажите или опровергните, что наименьший несчетный ординал равномощен континууму, т.е. $\mathbb{R}$.

Курт Гедель (1940): Континуум-гипотезу нельзя опровергнуть из системы аксиом ZFC Цермело-Френкеля.

Пол Коэн (1963): Континуум-гипотезу нельзя вывести из системы аксиом ZFC Цермело-Френкеля.

Лемма Цорна и теорема Цермело

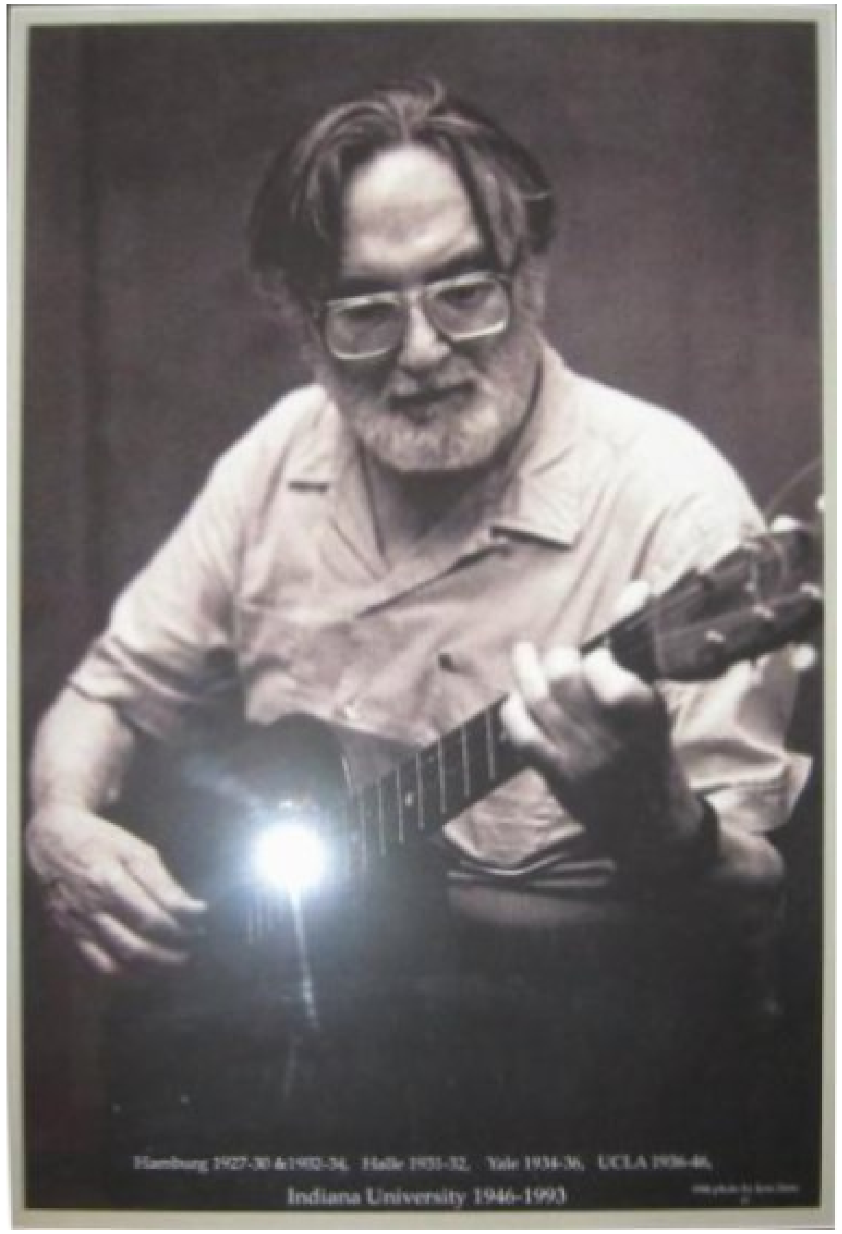
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$.

Лемма Цорна Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. Тогда в S найдется максимальный элемент.

Теорема Цермело: ("well-ordering theorem") Любое множество может быть вполне упорядочено.

Теорема: Следующие утверждения равносильны:
ZL: Лемма Цорна
WOT: Теорема Цермело
AC: Аксиома выбора.

«The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?» (шутка)



Max August Zorn
(1906 - 1993)

Гипотеза континуума

"Опровержение" континуум-гипотезы (липовое):
(Christopher Freiling, 1986)

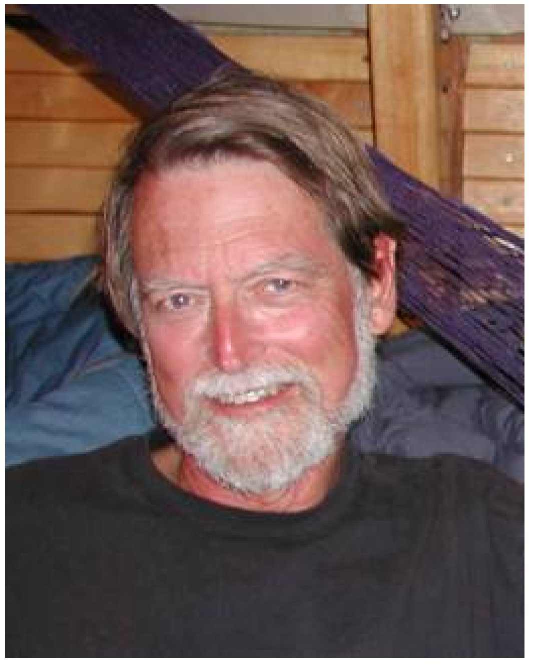
Предположим, что континуум-гипотеза верна. Тогда можно найти отношение полного порядка $\prec$ на прямой, причем **для каждой точки** $\alpha \in \mathbb{R}$**, множество** $\{\beta \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \beta \preceq \alpha\}$ **счетно.**

Студенты Вася и Петя играют в такую игру. Вася и Петя, не сговариваясь, выбирают (каждый) случайную точку z на отрезке. Если $z_{\text{Вася}} \prec z_{\text{Петя}}$, то выиграл Петя, иначе – Вася.

Пусть Петя выбрал точку α. **Поскольку множество** $\{\beta \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \beta \preceq \alpha\}$ **счетно, оно имеет меру 0, значит, Вася непременно выиграет.**

По той же причине, непременно выиграет Петя. Непорядок!

...one of the meaningless conundrums of set theory...



David Mumford

This leads us to the stunning result of Christopher Freiling 1986: using the idea of throwing darts, we can disprove the continuum hypothesis. Why his theorem is not universally known and considered on a par with the results of Godel and Cohen, I do not know.

Freiling used the argument to motivate a new axiom of set theory which disproves the continuum hypothesis. I believe we should go much further: his 'proof' shows that if we make random variables one of the basic elements of mathematics, it follows that the C.H. is false and we will get rid of one of the meaningless conundrums of set theory. The continuum hypothesis is surely similar to the scholastic issue of how many angels can stand on the head of a pin: an issue which disappears if you change your point of view.

(David Mumford, "The dawning of the age of stochasticity")

Мощность произведения двух множеств

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если X бесконечно, то $X \times X$ равномощно X.

Доказательство. Шаг 1: Пусть R – наименьший ординал, такой, что R бесконечно и не равномощно $R \times R$. **Он существует, если есть хоть одно бесконечное множество X, не равномощное X.**

Шаг 2: Рассмотрим такое отношение порядка на $R \times R$: $(x, y) \succ (x', y')$, если $x + y \succ x' + y'$, либо $x + y = x' + y'$, а $x \succ x'$. **Это отношение полного порядка**, ибо во всяком подмножестве $Z \subset R \times R$ найдется элемент (x, y) с наименьшим $x+y$, а среди всех таких элементов найдется (x, y) с наименьшим x.

Шаг 3: Для любого $(x, y) \in R \times R$, множество $V_{x,y} := \{(x_1, y_1) \in R \times R \ \ | \ \ (x_1, y_1) \prec (x, y)\}$ состоит из пар $(z := x_1 + y_1, x_1)$ таких, что $z \preceq x + y$, $x_1 \prec z$. Поскольку мощность $x + y$ строго меньше мощности R, **множество $V_{x,y}$ имеет мощность $|V_{x,y}| \leqslant |(x + y) \times (x + y)| = |x + y|$, что строго меньше, чем $|R|$.**

Шаг 4: Мы получили на $R \times R$ отношение полного порядка, такое, что любой его отрезок имеет мощность строго меньше R. **Значит, $R \times R$ – минимальный ординал мощности $|R|$. Мы доказали, что $(R \times R, \prec)$ эквивалентно $(R, \prec)$.** ■

And Now for Something Completely Different

Алгебраическая геометрия

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, а $y \in Y$. **Докажите, что $f^{-1}(y)$ аффинно.**

ВОПРОС: Как описать $f^{-1}(y)$ в терминах конечно-порожденных колец?

ОТВЕТ: Надо использовать тензорное произведение колец!

СЕГОДНЯ: Сегодня мы докажем, что $M \otimes_R (R/I) = M/IM$.

Тензорное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R – кольцо, M, M' – R-модули Обозначим за $M \otimes_R M'$ R-модуль, который порожден символами вида $m \otimes m'$, $m \in M, m' \in M'$, по модулю соотношений вида
$r(m \otimes m') = (rm) \otimes m' = m \otimes (rm')$,
$(m + m_1) \otimes m' = m \otimes m' + m_1 \otimes m'$,
$m \otimes (m' + m'_1) = m \otimes m' + m \otimes m'_1$. Такой R-модуль называется **тензорным произведением M и M'.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если M порождено над R набором $\{m_i\}$, а M' порождено $\{m'_j\}$, то $M \otimes_R M'$ порождено $\{m_i \otimes m'_j\}$.

Билинейные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M_1, M_2, M – R-модули. **Билинейное отображение** $\mu(M_1, M_2) \xrightarrow{\varphi} M$ есть отображение, которое удовлетворяет условиям $\varphi(rm, m') = \varphi(m, rm') = r\varphi(m, m')$, $\varphi(m+m_1, m') = \varphi(m, m')+\varphi(m_1, m')$, $\varphi(m, m' + m'_1) = \varphi(m, m') + \varphi(m, m'_1)$.

ТЕОРЕМА: (Универсальное свойство тензорного произведения) Для каждого билинейного отображения $B: M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ **существует единственный гомоморфизм** $b: M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M$**, делающий следующую диаграмму коммутативной:**

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \times M_2 \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "\tau"] & M_1 \otimes M_2 \arrow[d, "b"] \\
& M
\end{tikzcd}
$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Если R есть поле k, R-модули суть векторные пространства, и предыдущая теорема доказывает, что $\operatorname{Bil}(M_1 \times M_2, k) = (M_1 \otimes M_2)^*$. Для конечномерных M_i, это дает $M_1 \otimes M_2 = (M_1 \otimes M_2)^{**} = \operatorname{Bil}(M_1 \times M_2, k)^*$

Универсальное свойство тензорного произведения и категории

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Начальный объект** категории $\mathcal{C}$ есть обьект $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ такой, что для любого $Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ существует единственный морфизм $X \longrightarrow Y$.

ПРИМЕР: Нулевое пространство в категории векторных пространств.

ЗАДАЧА: Докажите, что начальный объект категории **единственный.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M_1, M_2 – R-модули, а $\mathcal{C}$ – следующая категория. Объекты $\mathcal{C}$ суть пары (R-модуль M, билинейное отображение $M_1 \times M_2 \longrightarrow M$), а морфизмы – гомоморфизмы $M \xrightarrow{\varphi} M'$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$
\begin{array}{ccc}
M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M \\
\downarrow & & \downarrow\varphi \\
M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M'
\end{array}
$$

УТВЕРЖДЕНИЕ:
(Универсальное свойство тензорного произведения)
Тензорное произведение $M_1 \otimes M_2$ есть начальный объект в категории $\mathcal{C}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Тензорное произведение однозначно определяется универсальным свойством.**

Внутренний Hom **и точность**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M, M' – R-модули. Рассмотрим группу $\operatorname{Hom}_R(M, M')$ гомоморфизмов. Определим на $\operatorname{Hom}_R(M, M')$ структуру R-модуля, по формуле $r\varphi(m) := \varphi(rm)$. Этот R-модуль называется **внутренний** Hom.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. **Тогда**

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

и

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$$

точны, для любого R-модуля N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажем точность первой последовательности. Точность в $\operatorname{Hom}_R(M_3, N)$ очевидна. Если $\nu \in \operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ переходит в 0 при проекции в $\operatorname{Hom}_R(M_1, N)$, это значит, что $\nu|_{M\,1} = 0$, что дает морфизм $\tilde{\nu} \in \operatorname{Hom}_R(M_3, N)$, переходящий в ν. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы хотим понять, как функтор $M \longrightarrow M \otimes_R N$ обращается с точными последовательностями. Для этого мы изучаем, как себя ведет $M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, P)$, и выражаем один из этих функторов через другой.

Внутренний Hom_R и тензорное произведение

ЗАМЕЧАНИЕ: Из универсального свойства $\otimes$ следует, что

$$\mathsf{Hom}_R(M_1 \otimes_R M_2, M) = \mathsf{Hom}_R(M_1, \mathsf{Hom}_R(M_2, M)).$$

Действительно, $\mathsf{Hom}_R(M_1, \mathsf{Hom}_R(M_2, M))$ **есть то же самое, что и билинейные отображения** $M_1 \times M_2 \longrightarrow M$**.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. **Тогда для любых R-модулей N, N', последовательность**

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_3 \otimes N', N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_2 \otimes N', N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_1 \otimes N', N)$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим утверждение с прошлого слайда дважды, получив точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\mathsf{Hom}_R(N', \mathsf{Hom}_R(M_3, N)) \\ &\longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N', \mathsf{Hom}_R(M_2, N)) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N', \mathsf{Hom}_R(M_3, N)), \end{aligned}$$

и воспользуемся изоморфизмом $\mathsf{Hom}_R(A \otimes_R B, M) = \mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_R(B, M))$.

■

Функтор Hom_R, часть 2

ЗАМЕЧАНИЕ: Из точности $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ следует точность $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$. Оказывается, **обратное тоже верно:** из точности второй последовательности (для любых N) следует точность первой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплекс** R-модулей есть последовательность вида $M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} M_3 \xrightarrow{d_3} ...$ такой, что $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

ЛЕММА: Пусть E есть $M_1 \xrightarrow{\mu} M_2 \xrightarrow{\rho} M_3 \longrightarrow 0$ – комплекс R-модулей, такой, что $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\rho_N} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\mu_N} \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ точно для любого R-модуля N. **Тогда E тоже точен.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Инъективность ρ_N влечет сюрьективность ρ, если мы положим $N := M_3/\operatorname{im}\rho$. Точность второй последовательности в члене $\operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ влечет точность E в M_2 при $N = M_2/\operatorname{im}\mu$. ■

Точность тензорного произведения

ТЕОРЕМА: Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. **Тогда последовательность**

$$M_1 \otimes_R M \longrightarrow M_2 \otimes_R M \longrightarrow M_3 \otimes_R M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

всегда точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пару слайдов назад было доказано, чтп

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3 \otimes M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2 \otimes M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1 \otimes M, N)$$

точна для любого M. Применив предыдущую лемму, получим, что (*) тоже точна. ■

СЛЕДСТВИЕ: Если $I \subset R$ – идеал, то $M \otimes_R (R/I) = M/IM$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Домножив тензорно точную последовательность $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ на M, получим $IM \longrightarrow M \longrightarrow (R/I) \otimes_R M \longrightarrow 0$.

Тензорное произведение модулей (примеры)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} Z$ – умножение на 2, то последовательность

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

полученная из $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ умножением на $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, **не точна слева**.