Алгебраическая геометрия,

лекция 7: тензорные произведения колец

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

18 ноября 2011

Зачем нужны тензорные произведения?

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, а $y \in Y$. **Докажите, что $f^{-1}(y)$ аффинно.**

ВОПРОС: **Как описать $f^{-1}(y)$ в терминах конечно-порожденных колец?**

ОТВЕТ: **Надо использовать тензорное произведение колец!**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^k$ – алгебраические подмножества. Докажите, что $X \times Y$ – тоже алгебраическое

Как описать $f^{-1}(y)$ в терминах конечно-порожденных колец?

ОТВЕТ: **Надо использовать тензорное произведение колец!**

Тензорное произведение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R – кольцо, M, M' – R-модули Обозначим за $M \otimes_R M'$ R-модуль, который порожден символами вида $m \otimes m'$, $m \in M, m' \in M'$, по модулю соотношений вида
$r(m \otimes m') = (rm) \otimes m' = m \otimes (rm')$,
$(m + m_1) \otimes m' = m \otimes m' + m_1 \otimes m'$,
$m \otimes (m' + m'_1) = m \otimes m' + m \otimes m'_1$. Такой R-модуль называется **тензорным произведением M и M'.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если M порождено над R набором $\{m_i\}$, а M' порождено $\{m'_j\}$, то $M \otimes_R M'$ порождено $\{m_i \otimes m'_j\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M_1, M_2, M – R-модули. **Билинейное отображение** $\mu(M_1, M_2) \xrightarrow{\varphi} M$ есть отображение, которое удовлетворяет условиям $\varphi(rm, m') = \varphi(m, rm') = r\varphi(m, m')$, $\varphi(m+m_1, m') = \varphi(m, m')+\varphi(m_1, m')$, $\varphi(m, m' + m'_1) = \varphi(m, m') + \varphi(m, m'_1)$.

Универсальное свойство тензорного произведения

ТЕОРЕМА: (Универсальное свойство тензорного произведения) Для каждого билинейного отображения $B: M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ **существует единственный гомоморфизм** $b: M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M$**, делающий следующую диаграмму коммутативной:**

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M_1 \otimes M_2 \\ \mathrm{Id}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M. \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M, M' – R-модули. Рассмотрим группу $\operatorname{Hom}_R(M, M')$ гомоморфизмов. Определим на $\operatorname{Hom}_R(M, M')$ структуру R-модуля, по формуле $r\varphi(m) := \varphi(rm)$. Этот R-модуль называется **внутренний** Hom.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из универсального свойства $\otimes$ следует, что

$$\operatorname{Hom}_R(M_1 \otimes_R M_2, M) = \operatorname{Hom}_R(M_1, \operatorname{Hom}_R(M_2, M)).$$

Действительно, $\operatorname{Hom}_R(M_1, \operatorname{Hom}_R(M_2, M))$ **есть то же самое, что и билинейные отображения** $M_1 \times M_2 \longrightarrow M$**.**

Точность тензорного произведения (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. **Тогда последовательность**

$$M_1 \otimes_R M \longrightarrow M_2 \otimes_R M \longrightarrow M_3 \otimes_R M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

всегда точна.

СЛЕДСТВИЕ: Если $I \subset R$ – идеал, то $M \otimes_R (R/I) = M/IM$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Домножив тензорно точную последовательность $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ на M, получим $IM \longrightarrow M \longrightarrow (R/I) \otimes_R M \longrightarrow 0$.

Теорема Гильберта о нулях (повторение)

Нам понадобится теорема Гильберта о нулях в следующем формате.

ТЕОРЕМА: (теорема Гильберта о нулях) Пусть $I \subset A$ – идеал в конечно-порожденном кольце над $\mathbb{C}$, Z множество его общих нулей, а I_Z – идеал всех функций, которые зануляются в Z. **Тогда $\mathcal{O}_Z := A/I_Z = (A/I)/N$,** где N есть нильрадикал A/I.

Доказательство. Шаг 1: Пусть a зануляется в Z. **Тогда какая-то степень a лежит в I.** Иначе $\mathcal{O}_Z[t]/(ta-1)$ было бы ненулевым кольцом, то есть у идеала $\langle I, ta-1\rangle$ были бы общие нули, что невозможно.

Шаг 2: Значит, $a \mod I$ есть нильпотент. Поэтому **образ I_Z в A/I совпадает с N.** ■

Тензорное произведение колец

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A, B – кольца, а $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B$ гомоморфизмы. Рассмотрим A и B как C-модули, и пусть $A \otimes_C B$ – тензорное произведение этих C-модулей над C. Определим на $A \otimes_C B$ произведение по формуле $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = aa' \otimes bb'$. Таким образом определяется **тензорное произведение колец**.

ПРИМЕР: $\mathbb{C}[t_1, ..., t_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_1, ..., z_n] = \mathbb{C}[t_1, ..., t_k, z_1, ..., z_n]$. Действительно, если обозначить полиномы степени d за $\mathbb{C}_d[t_1, ..., t_k]$, то $\mathbb{C}_d[t_1, ..., t_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{d'}[z_1, ..., z_n]$ – полиномы степени d по t_i и степени d' по z_i.

ПРИМЕР: Для любого гомоморфизма $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow A$, **кольцо** $A \otimes_C (C/I)$ **есть фактор** A **по идеалу** $A \cdot \varphi(I)$ (используем $M \otimes_R (R/I) = M/IM$).

УТВЕРЖДЕНИЕ: (ассоциативность $\otimes$)
Пусть $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B, C' \longrightarrow B, C' \longrightarrow D$ – гомоморфизмы колец. Докажите, что $(A \otimes_C B) \otimes_{C'} D = A \otimes_C (B \otimes_{C'} D)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из универсального свойства $\otimes$ следует, что $\operatorname{Hom}((A \otimes_C B) \otimes_{C'} D, M) = \operatorname{Hom}(A \otimes_C (B \otimes_{C'} D), M)$ есть пространство полилинейных отображений $A \otimes B \otimes D \longrightarrow M$, удовлетворяющих соотношениям $\varphi(ca, b, d) = \varphi(a, cb, d)$ и $\varphi(a, c'b, d) = \varphi(a, b, c'd)$. ■

Тензорное произведение колец и прообраз точки

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ соответствующий гомоморфизм колец, $y \in Y$ точка, а $\mathfrak{m}_y$ ее максимальный идеал. Обозначим за R_1 фактор кольца $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ по нильрадикалу. **Тогда** $\operatorname{Spec}(R_1) = f^{-1}(y)$**.**

Доказательство. Шаг 1: Если функция $\alpha \in \mathcal{O}_Y$ зануляется в y, то $f^*(\alpha)$ зануляется во всех точках $f^{-1}(y)$. Значит, **множество общих нулей** $\operatorname{Ann}(I)$ **идеала** $I := \mathcal{O}_X \cdot f^*\mathfrak{m}_y$ **содержит** $f^{-1}(y)$**.**

Шаг 2: Если $f(x) \neq y$, возьмем функцию $\beta \in \mathcal{O}_Y$, которая равна нулю в y и не равна нулю в $f(x)$. Поскольку $\varphi^*(\beta)(x) \neq 0$, а $\beta(y) = 0$, $x \notin \operatorname{Ann}(I)$. **Мы доказали, что множество общих нулей идеала** $I = \mathcal{O}_X \cdot f^*\mathfrak{m}_y$ **равно** $f^{-1}(y)$**.**

Шаг 3: По теореме Гильберта о нулях, $\mathcal{O}_{f^{-1}(y)}$ **есть фактор** $R = \mathcal{O}_X/I$ **по нильрадикалу.** ■

ЛЕММА: $A \otimes_C B \otimes_B B' = A \otimes_C B'$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из ассоциативности тензорного произведения. ■

Тензорное произведение колец и произведение многообразий

ЛЕММА: $A \otimes_C (B/I) = A \otimes_C B/(1 \otimes I)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пользуясь $M \otimes_R (R/I) = M/IM$, получаем

$$A \otimes_C (B/I) = (A \otimes_C B) \otimes_B (B/I) = (A \otimes_C B)/(1 \otimes I)$$

■

ЛЕММА 1: Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов, $R := A \otimes_{\mathbb{C}} B$ их произведение, а $N \subset R$ его нильрадикал. **Тогда** $\operatorname{Spec}(R/N) = \operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(B)$**.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $A = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I, B = \mathbb{C}[z_1, ..., z_k]/J$. Тогда $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_1, ..., z_k] = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n, z_1, ..., z_k]$. Дважды применяя предыдущую лемму, **получаем** $A \otimes_{\mathbb{C}} B = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n, z_1, ..., z_k]/(I + J)$**.**

Шаг 2: Множество Ann_{I+J} общих нулей $I + J$ есть $\operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(B) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$.

Шаг 3: Теорема Гильберта о нулях дает $\operatorname{Spec}(R/N) = \operatorname{Ann}_{I+J} = \operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(B)$. ■

Тензорное произведение колец и произведение многообразий (часть 2)

ЛЕММА: Для любого конечно-порожденного кольца A над $\mathbb{C}$, **пересечение P всех максимальных идеалов есть его нильрадикал.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $A = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$, а Z – множество общих нулей I. По теореме Гильберта о нулях, функция $f \in A$ **лежит в нильрадикале A тогда и только тогда, когда $f = 0$ в каждой точке Z.** Но это в точности значит, что f лежит в P. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$, $B \longrightarrow A$ – гомоморфизм, $\mathfrak{m} \subset B$ максимальный идеал.. Тогда кольцо $A \otimes_B (B/\mathfrak{m})$ **может иметь нильпотенты**, даже если A, B не имеют делителей нуля. **Приведите примеры.**

ТЕОРЕМА: Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов, а $R := A \otimes_{\mathbb{C}} B$ их произведение. **Тогда в R нет нильпотентов.**

Доказательство см. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: $\operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(B) = \operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathbb{C}} B)$.

Тензорное произведение колец и произведение многообразий (часть 3)

ТЕОРЕМА: Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов, а $R := A \otimes_{\mathbb{C}} B$ их произведение. **Тогда в R нет нильпотентов.**

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущей леммы, **достаточно доказать, что пересечение P максимальных идеалов R пусто.**

Шаг 2: Обозначим за X, Y многообразия $\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(B)$ Пользуясь Леммой 1, получим **биекцию между точками $X \times Y$ и максимальными идеалами R.**

Шаг 3: Каждый такой идеал имеет вид $\mathfrak{m}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{m}_y$, где $x \in X, y \in Y$. Тогда

$$P = \bigcap_{X \times Y} (\mathfrak{m}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{m}_y) = \bigcap_Y \left(\left(\bigcap_X \mathfrak{m}_x \otimes 1 \right) + 1 \otimes \mathfrak{m}_y \right) = \bigcap_Y 1 \otimes \mathfrak{m}_y = 0$$

потому что $\bigcap_Y 1 \otimes \mathfrak{m}_y = \bigcap_X \mathfrak{m}_x \otimes 1 = 0$ в силу отсутствия нильпотентов в A и B. ■

Простые идеалы в артиновых кольцах

ТЕОРЕМА: Пусть R – кольцо, конечномерное над полем k **("артиново"). Тогда число простых идеалов R конечно.**

Схема доказательства:

1. Факторизуем по нильрадикалу. **Получаем кольцо с теми же простыми идеалами, тоже конечномерное, но уже без нильпотентов.**

2. Доказываем, что **любое кольцо, конечномерное над полем и без нильпотентов, есть прямая сумма полей.**

3. **Доказываем теорему для прямой суммы полей.**

Конечномерные алгебры над полем и идемпотенты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо над полем (ассоциативное, коммутативное, но не обязательно с единицей) будем называть **коммутативной алгеброй**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Идемпотент** в алгебре есть элемент a такой, что $a^2 = a$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A – коммутативная алгебра, в которой нет ненулевых идемпотентов, и конечномерная над полем. **Тогда в A все элементы – нильпотенты.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку A конечномерно, любая убывающая цепочка идеалов обрывается. Значит, **есть идеал $I \subset A$, который не содержит ненулевых идеалов.**

Шаг 2: Поскольку в A нет нильпотентов, $z^2 \neq 0$. А поскольку I минимальный, для любого $z \in I$, имеем $zI = I$.

Шаг 3: Му доказали, что умножение на z не имеет ядра. Следовательно, **все элементы I обратимы.** Мы получаем, кроме того, что I вкладывается (некоммутативную) алгебру матриц $\operatorname{Mat}(I)$.

Конечномерные алгебры над полем и идемпотенты (продолжение)

Шаг 4: Поскольку I конечномерно, элементы $z, z^2, z^3, ... \in \operatorname{End} I$ линейно зависимы, что дает выражение вида $P(z) = 0$. Если у этого полинома нет свободного члена, разделим на z, пользуясь тем, что у z нет ядра. Получим $\operatorname{Id}_I = az + bz^2 + cz^3 + ...$ **Значит, в I есть идемпотент.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аргумент шага 4 доказывает следующее утверждение. Пусть I – коммутативная алгебра, конечномерная над полем, причем все элементы I обратимы. **Тогда I содержит единицу, т.е. является полем.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть A есть кольцо, конечномерное над полем, и без нильпотентов. Тогда **A есть прямая сумма полей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу доказанного утверждения, A содержит идемпотент a. Тогда a и $a - 1$ – идемпотенты, произведение которых равно нулю, а сумма равна 1. **Это дает $A = aA \oplus (1-a)A$, где aA и $(1-a)A$ – подалгебры с единицей.** Воспользовавшись индукцией по $\dim A$, можно считать, что aA и $(1-a)A$ – прямые суммы полей. ■

Простые идеалы в артиновых кольцах (продолжение)

ЛЕММА: Пусть A есть прямая сумма полей, $A = \bigoplus_i k_i$. **Тогда разложение $A = \bigoplus_i k_i$ определено однозначно** с точностью до перестановки слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $A = \bigoplus_i k_i = \bigoplus_i k'_i$, каждое из полей k_i разложится в прямую сумму, $k_i = \bigoplus_j k_i \cap k'_j$. Поскольку поле не имеет нетривиальных разложений такого вида, **получаем, что $k_i = k'_j$ для какого-то индекса j.** ■

Для доказательства конечности числа простых идеалов в артиновых кольцах, осталось убедиться в следующем.

ЛЕММА: Пусть A есть прямая сумма полей, $A = \bigoplus_i k_i$. Тогда **число простых идеалов A конечно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $I \subset A$ – простой идеал. Поскольку A/I – поле, каждое из слагаемых A проектируется в A/I тождественно либо нулем. **Значит, I есть прямая сумма всех k_i, кроме одного.** Мы получили биекцию между слагаемыми прямой суммы $A = \bigoplus_i k_i$ и простыми идеалами в A. В силу вышеприведенной леммы, **разложение $A = \bigoplus_i k_i$ определено однозначно.** ■

Конечные морфизмы

УПРАЖНЕНИЕ: Если M – конечно-порожденный R-модуль, а $R \longrightarrow R'$ – гомоморфизм колец. **Докажите, что $M \otimes_R R'$ – конечно-порожденный R'-модуль.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий. Этот морфизм называется **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль.

ТЕОРЕМА: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – конечный морфизм. **Тогда для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль, кольцо $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ конечно-порождено как $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y$-модуль. Но поскольку $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y = \mathbb{C}$, получаем, что R **конечномерно.**

Шаг 2: Пусть N – нильрадикал R. В силу доказанного выше, $\operatorname{Spec}(R/N)$ **– конечное множество.**

Шаг 3: С другой стороны, $\operatorname{Spec}(R/N) = f^{-1}(y)$. ■

Расширения полей и тензорное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей. Элемент $x \in K$ называется **примитивным**, если линейные комбинации x^i с коэффициентами из k порождают K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого конечного расширения $[K:k]$, есть последовательность расширений $K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n = k$ такая, что $[K_i : K_{i+1}]$ порождено примитивным элементом.

ЛЕММА: Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей характеристики 0. **Тогда $K \otimes_k \overline{k}$ изоморфно прямой сумме нескольких копий $\overline{k}$,** где где $\overline{k}$ есть алгебраическое замыкание k.

Расширения полей и тензорное произведение (продолжение)

Доказательство. Шаг 1: Пусть K_i такие, как в замечании выше. Тогда $K \otimes_k \overline{k} = K \otimes_{K_1} (K_1 \otimes_k \overline{k})$. Действуя по индукции, можно считать, что $K_1 \otimes_k \overline{k}$ есть прямая сумма нескольких копий $\overline{k}$. **Осталось доказать, что кольцо**

$$K \otimes_k \overline{k} = K \otimes_{K_1} (K_1 \otimes_k \overline{k}) = K \otimes_{K_1} \left(\bigoplus_i \overline{k} \right)$$

изоморфно $\bigoplus_j \overline{k}$.

Шаг 2: Поскольку $K = K_1[t]/(P)$, где P – неприводимый полином, корнем которого является x, **достаточно убедиться, что для любого неприводимого полинома $P(t)$ над k, кольцо $(k[t]/(P)) \otimes_k \overline{k}$ изоморфно прямой сумме полей.**

Шаг 3: Пусть α_i – корни P в $\overline{k}$. **Среди них нет кратных,** потому что иначе у $P(t)$ и $P'(t)$ был бы общий делитель, что противоречит неприводимости.

Шаг 4: Значит, $K \otimes_k \overline{k} = \bigoplus_i \overline{k}[t]/(t - \alpha_i)$. ■

Теорема о примитивном элементе

ТЕОРЕМА: ("теорема о примитивном элементе")
У каждого конечного расширения полей $[K:k]$ характеристики 0 найдется примитивный элемент.

Доказательство. Шаг 1: Число промежуточных полей $K\supset K'\supset k$ конечно. В самом деле, все такие поля соответствуют $\overline{k}$-подалгебрам в $K\otimes_k\overline{k}$, а **их конечное число потому, что $K\otimes_k\overline{k}=\bigoplus_i\overline{k}$.**

Шаг 2: Возьмем в качестве x элемент, который не принадлежит никаким промежуточным подполям; их конечное число, и они все являются k-подпространствами в K положительной коразмерности. **Значит, x примитивен.** ■