Алгебраическая геометрия,

лекция 8: целая зависимость

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

25 ноября 2011

Тензорное произведение колец (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A, B – кольца, а $C \longrightarrow A, C \longrightarrow B$ гомоморфизмы. Рассмотрим A и B как C-модули, и пусть $A \otimes_C B$ – тензорное произведение этих C-модулей над C. Определим на $A \otimes_C B$ произведение по формуле $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = aa' \otimes bb'$. Таким образом определяется **тензорное произведение колец**.

ПРИМЕР: $\mathbb{C}[t_1, ..., t_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_1, ..., z_n] = \mathbb{C}[t_1, ..., t_k, z_1, ..., z_n]$. Действительно, если обозначить полиномы степени d за $\mathbb{C}_d[t_1, ..., t_k]$, то $\mathbb{C}_d[t_1, ..., t_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{d'}[z_1, ..., z_n]$ – полиномы степени d по t_i и степени d' по z_i.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f: \ X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, $f^*: \ \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ соответствующий гомоморфизм колец, $y \in Y$ точка, а $\mathfrak{m}_y$ ее максимальный идеал. Обозначим за R_1 фактор кольца $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ по нильрадикалу. **Тогда** Spec$(R_1) = f^{-1}(y)$**.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A, B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$ без нильпотентов. **Тогда** Spec$(A \otimes_{\mathbb{C}} B) =$ Spec$(A) \times$ Spec(B)**.**

Расслоенное произведение

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий, $f^*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ соответствующий гомоморфизм колец, $Z \subset Y$ подмногообразие а I_Z его идеал. Обозначим за R_1 фактор кольца $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}Y} (\mathcal{O}_Y/I_Z)$ по нильрадикалу. **Докажите, что** $\operatorname{Spec}(R_1) = f^{-1}(Z)$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \xrightarrow{\pi_X} M, Y \xrightarrow{\pi_Y} M$ – отображения множеств. **Расслоенное произведение** $X \times_M Y$ есть множество всех пар $(x, y) \in X \times Y$ таких, что $\pi_X(x) = \pi_Y(y)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X \xrightarrow{\pi_X} M, Y \xrightarrow{\pi_Y} M$ – морфизмы аффинных многообразий. **Докажите, что $X \times_M Y$ алгебраично в $X \times Y$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X \xrightarrow{\pi_X} M, Y \xrightarrow{\pi_Y} M$ – морфизмы аффинных многообразий, $R := \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_M \mathcal{O}_Y$, а R_1 – фактор R по нильрадикалу. **Докажите, что** $\operatorname{Spec}(R_1) = X \times_M Y$**.**

Топология Зариского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Топология Зариского** на квазиаффинном многообразии есть топология, в которой замкнутыми являются подмногообразия, заданные системой полиномиальных уравнений. **Замыкание по Зарискому** подмножества $Z \subset M$ есть пересечение всех замкнутых по Зарискому подмножеств, содержащих Z.

ПРИМЕР: **Коконечная топология** есть топология на множестве S, в которой замкнуты конечные подмножества S (и только они).

ЗАМЕЧАНИЕ: **Топология Зариского на $\mathbb{C}$ совпадает с коконечной топологией.**

ЗАМЕЧАНИЕ: То же верно и для $\mathbb{Z}$.

Предостережение: **ОНА НЕХАУСДОРФОВА!**

Топология Зариского (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы определили топологию Зариского на множестве точек многообразия A, то есть на множестве максимальных идеалов $\mathcal{O}_A$ (так ее определял сам Зариский). **Следуя Гротендику, топологию Зариского обыкновенно определяют на множестве $\operatorname{Spec}_{pr}(\mathcal{O}_A)$ всех простых идеалов $\mathcal{O}_A$; замкнутые множества Z_I в этой топологии соответствуют идеалам $I \subset \mathcal{O}_A$, а простой идеал $\mathfrak{p}$ лежит в замкнутом множестве Z_I, если он содержит I.**

Oscar Zariski
(1899 – 1986)

Доминантные морфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Доминантный морфизм** есть морфизм $f: X \longrightarrow Y$, такой, что Y есть замыкание $f(X)$ по Зарискому.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ морфизм аффинных многообразий. Морфизм f **доминантен тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение.**

Доказательство. Шаг 1: Если f^* – не вложение, то $f(X)$ лежит в множестве нулей идеала $\ker f^*$. Действительно, точки X суть гомоморфизмы $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}$, а точки $f(X)$ суть гомоморфизмы $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathbb{C}$, которые получены композицией $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Шаг 2: Если $f(X)$ лежит в множестве нулей идеала $J \subset \mathcal{O}_Y$, все функции $\alpha \in J$ зануляются на $f(X)$. Значит, $f^*(\alpha) = 0$. ∎

Поле частных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $S \subset R$ – подмножество кольца R, замкнутое относительно умножения, и не содержащее 0. **Локализацией** кольца R по S называется кольцо, формально порожденное элементами вида a/F, где $a \in R$, $F \in S$ и с соотношениями $a/F \cdot b/G = ab/FG$, $a/F + b/G = \frac{aG+bF}{FG}$ и $aF^k/F^{k+n} = a/F^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R – кольцо без делителей нуля, а S – множество всех ненулевых элементов R. **Поле частных** R есть локализация R по S.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – доминантный морфизм, где X неприводимо. **Тогда Y тоже неприводимо.** Более того, $f^*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ **продолжается до гомоморфизма полей частных, $k(Y) \longrightarrow k(X)$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_Y$ вложено в $\mathcal{O}_X$, а последнее не имеет делителей нуля, **$\mathcal{O}_Y$ не имеет делителей, нуля, а значит Y неприводимо.**

Шаг 2: Вложение колец без делителей нуля продолжается до полей частных: $f^*(a/F) = f^*(a)/f^*(F)$. ■

Бирациональные морфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Доминантный морфизм неприводимых многообразий называется **бирациональным**, если соответствующий гомоморфизм полей частных – изоморфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – бирациональный морфизм. Тогда существует замкнутое по Зарискому подмножество $Z \subset Y$ такое, что $f: (X \backslash f^{-1}(Z)) \longrightarrow Y \backslash Z$ – изоморфизм.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_X$ конечно порождено, **найдется такое $F \in \mathcal{O}_Y$, что для любого $\in \mathcal{O}_X$, существует $b \in \mathcal{O}_Y$ такой, что $a = f\left(\frac{b}{F^k}\right)$.** Действительно, для каждой из образующих $\mathcal{O}_X$ такое F существует; перемножим полученные F-ы, благо их конечное число..

Шаг 2: Обозначим за Z дивизор нулей F. Тогда на $Y \backslash Z$ функция F обратима, и в силу шага 1 **гомоморфизм $f^*: (X \backslash f^{-1}(Z)) \longrightarrow Y \backslash Z$ биективен на функциях.** ■

Целая зависимость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Элемент $b \in B$ называется **целым над A**, если подкольцо $A[b] = A \cdot \langle 1, b, b^2, b^3, ...\rangle$, порожденное b и A, конечно порождено как A-модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полином называется **унитарным**, если его старший коэффициент равен 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Элемент $x \in B$ **цел над $A \subset B$ тогда и только тогда, когда цепочка A-подмодулей**

$$A \subset A \cdot \langle 1, x\rangle \subset A \cdot \langle 1, x, x^2\rangle \subset A \cdot \langle 1, x, x^2, x^3\rangle \subset ...$$

обрывается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из обрывания цепочки конечная порожденность очевидна. Наоборот, если $A[x]$ конечно-порождено, то любая степень x выражается через конечный набор образующих, которые сами выражаются через степени x. ■

СЛЕДСТВИЕ: x цел над $A \subset B \Leftrightarrow x$ является корнем унитарного полинома с коэффициентами из A. ■

Целое замыкание

УПРАЖНЕНИЕ: $x, y \in B \supset A$, причем y цело над $A[x]$. **Докажите, что y цело над A.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $A \subset B$ нетерово кольцо. Тогда **сумма, произведение целых над A элементов $x, y \in B$ – целые.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку y цело над $A[x]$, кольцо $A[x, y]$ цело над A **(проверьте это).** Поскольку **подмодуль конечно-порожденного A-модуля конечно порожден,** $x + y$ и $xy \in A[x, y]$ тоже целые. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B, целых над A, называется **целым замыканием A в B**. Множество всех элементов поля частных A, целых над A, называется **целым замыканием A**. Кольцо $A \subset B$ называется **целозамкнутым в B,** если оно совпадает со своим целым замыканием в B, и **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $k(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего следствия, **целое замыкание - это кольцо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Аффинное многообразие X называется **нормальным**, если его кольцо функций $\mathcal{O}_X$ целозамкнуто.

Факториальные кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **факториальным**, если в нем имеет место однозначность разложения на простые сомножители.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть кольцо A факториально. Тогда оно целозамкнуто.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $u, v \in A$, а $u/v \in k(A)$ – корень унитарного многочлена степени n. **Тогда v^n делится на u в A.**

Шаг 2: Если A факториально, а $u/v \in k(A)$ – корень унитарного многочлена, то v делится на u, в силу шага 1. Значит, $u/v \in A$**, а это и есть целозамкнутость.** ■

ТЕОРЕМА: (Гаусс)
Пусть A – факториальное кольцо. **Тогда $A[t]$ тоже факториально.**

Доказательство см. листочки

Конечные морфизмы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий. Этот морфизм называется **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль.

ТЕОРЕМА: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – конечный морфизм. **Тогда для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль, кольцо $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ конечно-порождено как $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y$-модуль. Но поскольку $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y = \mathbb{C}$, получаем, что R **конечномерно.**

Шаг 2: Пусть N – нильрадикал R. Поскольку R/N конечномерно, число простых идеалов в R/N конечно. Значит, $\operatorname{Spec}(R/N)$ **– конечное множество.**

Шаг 3: С другой стороны, $\operatorname{Spec}(R/N) = f^{-1}(y)$. ■