Алгебраическая геометрия,

лекция 9: целые морфизмы

Миша Вербицкий

Матфак ВШЭ, Москва

2 декабря 2011

16-го декабря - экзамен

16-го декабря - экзамен!

Целая зависимость (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Элемент $b \in B$ называется **целым над A**, если подкольцо $A[b] = A \cdot \langle 1, b, b^2, b^3, ...\rangle$, порожденное b и A, конечно порождено как A-модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полином называется **унитарным**, если его старший коэффициент равен 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ: x цел над $A \subset B \Leftrightarrow x$ является корнем унитарного полинома с коэффициентами из A. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ нетерово кольцо. Тогда **сумма, произведение целых над A элементов $x, y \in B$ – целые.**

Целое замыкание (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ – кольца. Множество всех элементов B, целых над A, называется **целым замыканием A в B**. Множество всех элементов поля частных A, целых над A, называется **целым замыканием A**. Кольцо $A \subset B$ называется **целозамкнутым в B,** если оно совпадает со своим целым замыканием в B, и **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $k(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего следствия, **целое замыкание - это кольцо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Аффинное многообразие X называется **нормальным**, если его кольцо функций $\mathcal{O}_X$ целозамкнуто.

Конечные морфизмы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \longrightarrow Y$ – морфизм аффинных многообразий. Этот морфизм называется **конечным**, если $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль.

ТЕОРЕМА: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – конечный морфизм. **Тогда для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ конечен.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{O}_X$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_Y$-модуль, кольцо $R := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y)$ конечно-порождено как $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y$-модуль. Но поскольку $\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_y = \mathbb{C}$, получаем, что R **конечномерно.**

Шаг 2: Пусть N – нильрадикал R. Поскольку R/N конечномерно, число простых идеалов в R/N конечно. Значит, $\operatorname{Spec}(R/N)$ **– конечное множество.**

Шаг 3: С другой стороны, $\operatorname{Spec}(R/N) = f^{-1}(y)$. ∎

Лемма Накаямы

Tadashi Nakayama

(1912-1964)

ВОПРОС: Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в нетеровом кольце. **Как доказать, что $\bigcap_i \mathfrak{a}^i = 0$?**

ОТВЕТ: Лемма Накаямы!

ЗАМЕЧАНИЕ: Это неверно, если A – кольцо непрерывных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: A-модуль M называется **модулем без кручения**, если естественный морфизм $M \longrightarrow M \otimes_A k(A)$ – вложение.

Лемма Накаямы: Пусть A – кольцо без делителей нуля над $\mathbb{C}$, а M – конечно-порожденный A-модуль без кручения. **Тогда для любого нетривиального идеала $\mathfrak{a} \subset A$, из $\mathfrak{a}M = M$ следует $M = 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку M конечно порожден, **$k(A)$-векторное пространство $M_k := M \otimes_A k(A)$ конечномерно.** Обозначим за n его размерность.

Лемма Накаямы (продолжение)

Лемма Накаямы (продолжение): Пусть A – кольцо без делителей нуля над $\mathbb{C}$ а M – конечно-порожденный A-модуль без кручения, $n = \dim M_k := M \otimes_A k(A)$. **Тогда для любого нетривиального идеала $\mathfrak{a} \subset A$, из $\mathfrak{a}M = M$ следует $M = 0$.**

Шаг 2: Обозначим за $\Lambda_A^n M$ кососимметрическую часть $M \otimes_A M \otimes_A ... \otimes_A M$. **Тогда $\mathfrak{a}\Lambda_A^n M = \Lambda_A^n M$, причем $\Lambda_A^n M \otimes_A k(A) = \Lambda_{k(A)}^n M_k \cong k(A)$.**

Шаг 3: Обозначим $\Lambda_A^n M \otimes_A k(A)$ за V. Коль скоро $\Lambda_A^n M \otimes_A k(A) \neq 0$, естественное отображение $\Lambda_A^n M \longrightarrow V$ нетривиально, значит, **его образ – конечно-порожденный A-подмодуль W в $V \cong k(A)$.**

Шаг 4: Пусть x_i – образующие W. Поскольку $\mathfrak{a}W = W$, имеем $x_i = \sum a_{ij} x_j$, для каких-то $a_{ij} \in \mathfrak{a}$.

Шаг 5: Обозначим за A матрицу (a_{ij}). Поскольку $A - \mathrm{Id}$ имеет ядро $(x_1, ..., x_n)$, $\det(A - \mathrm{Id}) = 0$. **Раскладывая по столбцам и строкам сей определитель, получим $1 = P(a_{ij})$, где P есть полином без свободного члена.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: **Эта лемма верна в гораздо большей общности.**

Целые морфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X$ – вложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм $X \longrightarrow Y$ называется **целым**, если он конечный и доминантный, а X неприводимо.

ТЕОРЕМА: Целый морфизм всегда сюрьективен.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – целый морфизм, $A = \mathcal{O}_Y$, $B = \mathcal{O}_X$. **Это равносильно тому, что $A \subset B$ – подкольцо, B без делителей нуля, причем B конечно-порождено как A-модуль.**

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{m}_y \subset A$ – максимальный идеал, соответствующий $y \in Y$. **По лемме Накаямы, $\mathfrak{m}_y B \neq B$.**

Шаг 3: $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A A/\mathfrak{m}_y) = B/\mathfrak{m}_y B$. **Поскольку это кольцо ненулевое, множество $f^{-1}(y)$ непусто.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Получаем, что **при целом морфизме, прообраз каждой точки – конечное, непустое множество.**

Конечность целого замыкания

ТЕОРЕМА: Пусть A – нетерово кольцо без делителей нуля, $K : k(A)$ – конечное расширение, а B – целое замыкание A в K. **Тогда B конечно порождено как A-модуль.**

Доказательство. Шаг 1: Для любого $b \in K$, обозначим за $L_b : K \longrightarrow K$ оператор умножения на b. Рассмотрим L_b как **$k(A)$-линейный эндоморфизм конечномерного линейного пространства K**, и определим **след** $\operatorname{Tr}(b) := \operatorname{Tr}(L_b)$. Поскольку $\operatorname{Tr}(b) = \frac{d}{dt}\det(t\operatorname{Id}_K - L_b)(0)$, для любого b, целого над A, **след b лежит в A.**

Шаг 2: $x, y \longrightarrow \operatorname{Tr}(xy)$ – **невырожденная $k(A)$-билинейная симметрическая форма на K.** В самом деле, $\operatorname{Tr}(xx^{-1}) = \dim_{k(A)} K$, а $\operatorname{ch} k(A) = 0$.

Шаг 3: Выберем в $K : k(A)$ базис $e_1, ..., e_n$, $n = \dim_{k(A)} K$. Пусть $P_i(t)$ – соответствующие минимальные полиномы, $P_i(e_i) = 0$. Запишем $P_i(t) = A_i t^{n_i} + \sum_{j<n_i} a_{ij} t^j$, где $A_i, a_{ij} \in A$. Тогда $A_i e_i$ – корень унитарного полинома $\tilde{P}_i(t) = t^{n_i} + \sum_{j<n_i} A^{n_i-j} a_{ij} t^j$. Мы доказали, что **базис в $K : k(A)$ можно выбрать из векторов $e_i \in K$, которые целы над A.**

Конечность целого замыкания (продолжение)

Шаг 4: Пусть $e_i^* \in K$ вектора, заданные формулой $\operatorname{Tr}(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. **Это базис, двойственный к базису e_i, относительно невырожденной формы Tr**. Обозначим за $M \subset K$ A-модуль $M := \{b \in K \quad | \quad \operatorname{Tr}(be_i) \in A\}$. Очевидно, M – свободный модуль с базисом e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*.

Шаг 5: Поскольку $e_i \in B$, а для любого $b \in B$, $\operatorname{Tr}(b) \in A$, имеем $B \subset M$. Значит, B **– подмодуль конечно-порожденного модуля над нетеровым кольцом**, то есть **конечно-порожден.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть B – целое замыкание A, где A и B – конечно-порожденные кольца над $\mathbb{C}$. **Тогда $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ – целый морфизм.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $A \subset B$ – нетеровы кольца без делителей нуля, причем все элементы B целы над A. **Тогда B – конечно-порожденный A-модуль**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В самом деле, B есть подмодуль целого замыкания A в $k(B)$, а оно конечно порождено. ■

Факторпространство

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть R – нетерово кольцо без делителей нуля, снабженное действием конечной группы G, а R^G – кольцо инвариантов. **Тогда** $\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} R^G$ **– целый морфизм.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Доминантность очевидна, потому что $R^G \subset R$, а конечность следует из того, что каждый $f \in R$ удовлетворяет уравнению $\prod_{g\in G}(t - g(f)) = 0$ с коэффициентами в R^G, **то есть цел над** R^G**.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – конечная группа, действующая на аффинном многообразии автоморфизмами. **Факторпространство** X/G есть спектр кольца $\mathcal{O}_X^G$.

ПРИМЕР: $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\} = \mathbb{C}[x^2, y^2, xy] = \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]/(t_1t_2 = t_3^2)$. Действительно, $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\} = \operatorname{Spec} A$, где $A = \mathbb{C}[x, y]^{\{\pm 1\}}$, то есть A есть **кольцо четных полиномов.**

ПРИМЕР: Пусть группа $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует на одномерной аффинной плоскости $\mathbb{C}$ умножением на примитивный корень $\sqrt[n]{1}$. Тогда $\mathbb{C}/G = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t]^G) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t^n])$, то есть **факторпространство** $\mathbb{C}/G$ **изоморфно** $\mathbb{C}$**.**

Факторпространство (продолжение)

ТЕОРЕМА: Рассмотрим естественный морфизм $\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} R^G$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда $x \in G \cdot y$, т.е. $\operatorname{Spec} R^G$ **есть пространство G-орбит.**

Доказательство. Шаг 1: Если два максимальных идеала R сопряжены посредством элемента $g \in G$, их пересечения с $R^G \subset G$ равны. То есть $\varphi(gx) = \varphi(x)$: **каждая G-орбита отображается в одну точку. Осталось доказать, что прообраз каждой точки – ровно одна G-орбита.**

Шаг 2: Для любого идеала $\mathfrak{m} \subset R^G$, $(\mathfrak{m}R)^G = \mathfrak{m}$ (см. лекцию про теорему Нетер). Значит, $A^G = R^G/\mathfrak{m}$, где $A := R \otimes_{R^G} (R^G/\mathfrak{m}) = R/\mathfrak{m}R$.

Шаг 3: Пусть $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал точки $y \in \operatorname{Spec} R^G$, а N – нильрадикал A. Поскольку $\varphi^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(A/N)$, **точки $\varphi^{-1}(y)$ – это максимальные идеалы кольца A/N.**

Шаг 4: Полупростое артиново кольцо A/N есть прямая сумма конечных расширений $\mathbb{C}$, то есть $A/N = \bigoplus \mathbb{C}$. Поскольку $A^G = \mathbb{C}$ (шаг 2), **G действует на слагаемых этой прямой суммы транзитивно.** Значит, **все точки $\varphi^{-1}(y)$ образуют одну G-орбиту.** ∎