Векторные расслоения, экзамен

Каждый студент получает случайный список из 8 задач, по две из каждого раздела, созданный специальной программой. Число очков за это задание вычисляется по формуле $\min(9s, 40)$, где s – сумма баллов за задачи. Сдача устно. Каждое решение должно быть обосновано ссылкой на сданные листочки или литературу; использованные теоремы надо уметь доказывать, и принимающий вправе спросить доказательство любой из использованных теорем.

Пожалуйста, сдайте копии ведомостей к листочкам, с пометками о том, сколько баллов вам причитается по каждому листочку.

Определение 3.1. В задачах встречаются стандартные обозначения для групп Ли: $U(n)$ есть группа унитарных преобразований $\mathbb{C}^n$, $SU(n)$ есть группа унитарных преобразований $\mathbb{C}^n$ с единичным детерминантом, $SL(n)$ есть группа матриц с единичным детерминантом, $O(p, q)$ – группа изометрических линейных автоморфизмов пространства V со скалярным произведением с сигнатурой (p, q), $SO(p, q) \subset O(p, q)$ – подгруппа, состоящая из матриц с определителем 1.

3.1. Векторные расслоения и расслоенные пространства

Задача 3.1. Докажите, что любое векторное расслоение на $\mathbb{R}^2$ тривиально.

Задача 3.2. Пусть B – двумерное комплексное расслоение на M, причем $B \cong B^*$. Постройте на B кватернионную структуру (тройку операторов $I, J, K \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} B$, удовлетворяющих $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{\mathsf{Id}}_B$).

Задача 3.3 (2 балла). Постройте 4-мерное расслоение, которое нельзя разложить в прямую сумму двух двумерных.

Задача 3.4 (2 балла). Пусть $X = SO(1, n)/O(n)$. Докажите, что проекция $SO(1, n) \longrightarrow X$ есть главное расслоение, и постройте его тривиализацию.

Задача 3.5. Докажите, что не существует гладкого расслоения над S^2 со слоем S^3 и тотальным пространством S^5.

Задача 3.6. Докажите, что для любого $n > 2$ не существует гладкого расслоения с базой S^n, слоем S^1 и тотальным пространством S^{n+1}.

Определение 3.2. Псевдориманова метрика сигнатуры (p, q) на многообразии M есть скалярное произведение сигнатуры (p, q) на TM.

Задача 3.7. Докажите, что на S^4 нет псевдоримановой метрики сигнатуры $(1, 3)$.

Задача 3.8 (2 балла). Докажите, что на S^4 нет псевдоримановой метрики сигнатуры $(2, 2)$.

3.2. Дифференциальные формы, диффеоморфизмы и подрасслоения

Определение 3.3. Группа Ли действует сама на себе **левыми сдвигами** $L_g(x) = gx$ и **правыми сдвигами** $R_g(x) = xg^{-1}$. **Биинвариантное** подрасслоение в TM есть подрасслоение, которое инвариантно относительно левых и правых сдвигов.

Задача 3.9. Пусть $B \subset TG$ – биинвариантное подрасслоение в касательном расслоении к группе Ли. Докажите, что оно инволютивно.

Определение 3.4. Контактная структура на нечетномерном многообразии есть подрасслоение $B \subset TM$ коразмерности 1, такое, что форма Фробениуса $\Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ невырождена.

Задача 3.10. Пусть G – некоммутативная, связная группа Ли размерности 3. Постройте контактную структуру на G, или найдите контрпример.

Задача 3.11. Пусть ω – невырожденная 2-форма на четномерном многообразии M, $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 8$. Предположим, что $d\omega^2 = 0$. Докажите, что $d\omega = 0$.

Задача 3.12. Пусть ω – невырожденная 2-форма на четномерном многообразии M, $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 6$. Предположим, что $d\omega = \omega \wedge \theta$, где θ есть 1-форма. Докажите, что $d\theta = 0$.

Определение 3.5. Пусть $\eta \in \Lambda^* V^*$ – элемент грассмановой алгебры на $V^* = \mathbb{R}^n$, а $\ker \eta \subset V$ – множество векторов $v \in V$ таких, что $\eta \lrcorner v := \eta(v, \cdot, \cdot, ..., \cdot)$ равно нулю. Это подпространство называется **аннулятором**, или **ядром** формы η.

Задача 3.13. Постройте 3-форму $\rho \in \Lambda^3 \mathbb{R}^6$ такую, что $\ker \rho = 0$.

Задача 3.14 (2 балла). Пусть B – инволютивное подрасслоение в TM, $\dim B = \dim M - 2$, а $\omega \in \Lambda^2 M$ – 2-форма такая, что $\ker \omega = B$. Докажите, что $d\omega = \omega \wedge \theta$, где θ – 1-форма.

Задача 3.15. Пусть θ – 1-форма на M такая, что $d\theta = \omega$ симплектична. Докажите, что существует векторное поле $v \in TM$ такое, что $\operatorname{Lie}_v \omega = \omega$.

Задача 3.16. Пусть M – компактное симплектическое многообразие вещественной размерности 6. Класс когомологий $\eta \in H^2(M, \mathbb{R})$ называется **симплектическим**, если это класс когомологий какой-то симплектической формы. Докажите, что множество симплектических классов на M несвязно.

3.3. Связности и кривизна

Задача 3.17. Пусть L – нетривиальное одномерное комплексное расслоение со связностью на сфере S^2, а $\Theta_L \in \Lambda^2 S^2 \otimes \operatorname{End} L = \Lambda^2 S^2$ его кривизна. Докажите, что существует связность на L такая, что Θ_L есть форма объема на S^2.

Задача 3.18. Пусть L – нетривиальное одномерное комплексное расслоение со связностью на M, а $\Theta_L \in \Lambda^2 S \otimes \operatorname{End} L = \Lambda^2 S$ его кривизна. Докажите, что Θ_L – замкнутая 2-форма.

Задача 3.19 (2 балла). Пусть L – нетривиальное одномерное комплексное расслоение со связностью на S, а $\Theta_L \in \Lambda^2 S \otimes \operatorname{End} L = \Lambda^2 S$ его кривизна. Предположим, что форма Θ_L точна, а $\pi_1(S) = 0$. Докажите, что расслоение L тривиально.

Задача 3.20. Пусть $\pi : \ E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение. Докажите, что на π есть G-инвариантная связность Эресманна.

Задача 3.21. Пусть B – векторное расслоение размерности 4, а $\omega \in \Lambda^2 B$ – 2-форма постоянного ранга. Докажите, что на B существует связность, сохраняющая ω, или приведите контрпример.

Задача 3.22. Пусть B – векторное расслоение размерности 3, а $\omega \in \Lambda^2 B$ – 2-форма, которая нигде не зануляется. Докажите, что на B существует связность, сохраняющая ω, или приведите контрпример.

Задача 3.23. Пусть $L \in \operatorname{End} B$ – эндоморфизм вещественного расслоения, который удовлетворяет $L^2 = \mathsf{Id}_B$ (квадрат L – тождественный эндоморфизм). Докажите, что найдется связность, которая сохраняет L, или приведите контрпример.

Задача 3.24 (2 балла). Пусть $L \in \operatorname{End} B$ – эндоморфизм вещественного расслоения, который удовлетворяет $L^3 = L$. Докажите, что найдется связность, которая сохраняет L, или приведите контрпример.

Задача 3.25. Пусть $B = B_1 \oplus B_2$, а $\Pi \in \operatorname{End} B$ – оператор проекции B на B_1 вдоль B_2. Докажите, что на B найдется связность, которая сохраняет Π.

Задача 3.26 (2 балла). Пусть G – группа Ли с биинвариантной римановой метрикой, ∇ связность Леви-Чивита, $X, Y \in TG$ – левоинвариантные векторные поля. Докажите, что $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[x, y]$.

3.4. Главные расслоения и G-структуры

Задача 3.27. Приведите пример двумерного комплексного расслоения, структурная группа $GL(2,\mathbb{C})$ которого не редуцируется к $SU(2)$, или докажите, что их нет.

Задача 3.28. Приведите пример 2-мерного вещественного расслоения, структурная группа $GL(2,\mathbb{R})$ которого не редуцируется к группе диагональных матриц $R^* \times R^* \subset GL(2,\mathbb{R})$, или докажите, что их нет.

Задача 3.29 (2 балла). Приведите пример двумерного вещественного расслоения, структурная группа $GL(2,\mathbb{R})$ которого не редуцируется к $O(1,1)$, или докажите, что их нет.

Задача 3.30. Пусть $GL(n)$ – группа линейных автоморфизмов пространства $V = \mathbb{R}^n$, $\phi \in \Lambda^k V$ ненулевая k-форма, а $G \subset GL(n)$ – стабилизатор ϕ. Пусть B – векторное расслоение со структурной группой, редуцированной к G. Докажите, что у $\Lambda^k B$ есть нигде не зануляющееся сечение.

Задача 3.31 (2 балла). Пусть $M \longrightarrow S^2$ – главное S^1-расслоение, а $\pi_1(M) = 0$. Докажите, что M гомеоморфно S^3.

Задача 3.32. Пусть $GL(n)$ – группа линейных автоморфизмов пространства $V = \mathbb{R}^n$, а $G \subset GL(n)$ – группа, сохраняющая k-мерное подпространство $W \subset V$. Пусть B – векторное расслоение со структурной группой, редуцированной к G. Докажите, что у B есть k-мерное подрасслоение.

Задача 3.33. Приведите пример главного $SU(2)$-расслоения, которое нетривиально.

Задача 3.34. Приведите пример главного $U(3)$-расслоения, которое нетривиально.