

Главные расслоения, тест 1: основы топологии

Число очков за это задание вычисляется по формуле $\frac{5}{4}s$, где s – сумма баллов за задачи. Решение письменное, сдается до 22:00 понедельника, 9-го сентября.

Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю, во избежание пересдач и других эксцессов.

1.1. Общая топология

Замечание 1.1. Все топологические пространства в этом листочке предполагаются хаусдорфовыми.

Определение 1.1. Топологическое пространство M **локально компактно**, если у любой точки есть открытая окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 1.1. Докажите, что непрерывная биекция компактных топологических пространств – гомеоморфизм.

Задача 1.2. Пусть $f : M \rightarrow M'$ – непрерывная биекция локально компактных топологических пространств. Всегда ли f – гомеоморфизм?

Задача 1.3 (4 балла). Пусть $f : M \rightarrow M'$ – непрерывная биекция многообразий. Докажите, что f – гомеоморфизм, или найдите контрпример.

Задача 1.4. Пусть $Z \subset \mathbb{R}^2$ – счетное подмножество. Докажите, что дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus Z$ связно.

Задача 1.5 (5 баллов). Пусть $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ непрерывное, инъективное отображение. Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus \text{im } \phi$ связно, или найдите контрпример.

1.2. Гомотопическая топология

Задача 1.6. Пусть V – трехмерное векторное расслоение над S^1 . Всегда ли V тривиально?

Задача 1.7. Пусть $\phi : M \rightarrow S^3$ – локально тривиальное расслоение со слоем S^1 . Постройте сечение ϕ .

Определение 1.2. Пусть $M \subset M'$ – подмногообразие. **Нормальное расслоение** есть $TM'|_M / TM$.

Задача 1.8. Пусть $M \subset M'$ подмногообразие в связном многообразии коразмерности 1. Обозначим нормальное расслоение за NM . Докажите следующие утверждения, или приведите контрпример.

- а. (2 балла) NM нетривиально $\Rightarrow M' \setminus M$ связно.
- б. (1 балл) NM тривиально $\Rightarrow M' \setminus M$ несвязно.

Задача 1.9 (2 балла). Пусть $Z \subset M$ – подмногообразие четырехмерного многообразия, гомеоморфное двумерной сфере. Докажите, что $\pi_1(M \setminus Z)$ нетривиальна, или найдите контрпример.