Векторные расслоения, контрольная 2: связности и расслоения

Число очков за это задание вычисляется по формуле $1,5s - 0,3(\max(1,5s,20)$, где s – сумма баллов за задачи. Решение письменное, сдается до 20:30 понедельника, 4-го ноября.

2.1. Расслоения и формы

Определение 2.1. Псевдориманова метрика есть невырожденная, симметрическая форма $g \in \mathsf{Sym}^2 T^*M$. **Сигнатура** псевдоримановой метрики есть сигнатура ее ограничения на любой из слоев.

Задача 2.1 (2 балла). Постройте псевдориманову метрику сигнатуры $(1,1)$ на двумерной сфере S^2, или докажите, что она не существует.

Задача 2.2. Постройте псевдориманову метрику сигнатуры $(2,1)$ на трехмерной сфере S^3, или докажите, что она не существует.

Определение 2.2. Симплектическая форма на многообразии есть замкнутая, невырожденная 2-форма.

Задача 2.3. Постройте симплектическую форму на четырехмерной сфере S^4, или докажите, что она не существует.

Задача 2.4. Группа $G = SO(2n)$ действует на S^{2n-1} обычным образом. Докажите, что на S^{2n-1} нет ненулевых G-инвариантных 1-форм.

Задача 2.5. Пусть g – $SO(2n)$-инвариантная псевдориманова метрика на S^{2n-1}. Докажите, что g положительно определена либо отрицательно определена.

2.2. Дифференциальные формы и связности

Задача 2.6 (2 балла). Пусть Ω – замкнутая дифференциальная форма на M. Определим $\ker\Omega$ как пучок векторных полей $X \in TM$ таких, что $\Omega \lrcorner X = 0$, где $\Omega \lrcorner X$ есть результат подстановки, $\Omega \lrcorner X := \Omega(X, ...)$. Докажите, что $\forall X, Y \in \ker\Omega$, имеет место $[X,Y] \in \ker\Omega$.

Задача 2.7 (2 балла). Пусть $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на расслоении B. Докажите, что для любого сечения $\nu \in B \otimes \Lambda^1 M$ найдется $\eta \in B$ такой, что $\nabla\eta = \nu$, или найдите контрпример.

Задача 2.8 (2 балла). Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение постоянного ранга. Докажите, что существует связность $\nabla: TM \longrightarrow TM \otimes \Lambda^1 M$ такая, что $\nabla(B) \subset B \otimes \Lambda^1 M$.

Задача 2.9 (2 балла). Пусть $B \subset TM \otimes TM$ – подрасслоение постоянного ранга. Докажите, что существует связность $\nabla: TM \longrightarrow TM \otimes \Lambda^1 M$ такая, что $\nabla(B) \subset B \otimes \Lambda^1 M$, или найдите контрпример.[1]

2.3. Кручение

Задача 2.10 (3 балла). Пусть M – трехмерное многообразие, а $\eta \in \Lambda^2 M$ нигде не зануляющаяся, замкнутая 2-форма. Докажите, что существует связность без кручения, такая, что $\nabla\eta = 0$.

Задача 2.11 (2 балла). Докажите, что для любой симплектической формы ω найдется связность без кручения, такая, что $\nabla\omega = 0$.

Задача 2.12 (2 балла). Пусть $B \subset TM$ – одномерное подрасслоение. Докажите, что существует связность без кручения, такая, что $\nabla(B) \subset B \otimes \Lambda^1 M$.

Задача 2.13 (2 балла). Пусть $B \subset TM$ – двумерное подрасслоение. Докажите, что существует связность без кручения, такая, что $\nabla(B) \subset B \otimes \Lambda^1 M$, или найдите контрпример.

[1] Каждая связность на TM задает связность на тензорных степенях по формуле Лейбница; в этой задаче идет речь о связности на $TM \otimes TM$, индуцированной (заданной) ∇.