Векторные расслоения 1: гладкие многообразия

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

1.1. Пучки, многообразия, гладкие структуры

Замечание 1.1. Этот листок служит для напоминания о гладких многообразиях, разбиении единицы и векторных расслоениях. Он никак не предназначен для первого ознакомления с этими понятиями.

Задача 1.1. Пусть U, V – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $\phi: \ U \longrightarrow V$ – гомеоморфизм, переводящий гладкие функции в гладкие, причем обратный к нему тоже переводит гладкие в гладкие. Докажите, что это диффеоморфизм.

Замечание 1.2. Мораль приведенной выше задачи: для выяснения класса гладкости отображения достаточно понимать, как оно действует на функциях. Это позволяет определять "гладкие многообразия" и "гладкие отображения" в терминах функций.

Определение 1.1. Предпучок функций на топологическом пространстве M задается следующими данными. Для каждого открытого подмножества $U \subset M$, задано подкольцо $\mathcal{F}(U) \subset F(U)$ в кольце $F(U)$ функций на U, причем ограничение функции $\gamma \in \mathcal{F}(U)$ с открытого множества U на подмножество $U_1 \subset U$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1)$. Предпучок функций называется **пучком**, если эти подкольца удовлетворяют следующему условию. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор функций, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.

Определение 1.2. Окольцованное пространство есть пространство с заданным на нем пучком функций, которые образуют кольцо по отношению к обычным операциям умножения и сложения.

Замечание 1.3. Окольцованные пространства образуют категорию. Морфизмы окольцованных пространств определяются так. Пусть $A, \mathcal{F}$ и $B, \mathcal{G}$ – окольцованные пространства, а $\phi: \ A \longrightarrow B$ непрерывное отображение, такое, что $\phi^*(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}$; тогда ϕ называется морфизмом. Изоморфизм окольцованных пространств есть морфизм, заданный гомеоморфизмом, обратный к которому – тоже морфизм.

Задача 1.2 (*). Рассмотрим окольцованное пространство $(\mathbb{R}^n, C^i)$, с функциями, которые i-кратно дифференцируемы. Опишите все морфизмы из $(\mathbb{R}^n, C^{i+1})$ в $(\mathbb{R}^n, C^i)$.

Определение 1.3. Многообразие есть топологическое пространство, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. **Гладкое многообразие** есть окольцованное пространство, локально изоморфное $\mathbb{R}^n$ с пучком гладких функций на нем.

Замечание 1.4. Изоморфизм гладких многообразий называется **диффеоморфизмом**. Это гомеоморфизм, который переводит гладкие функции в гладкие.

Определение 1.4. Покрытием топологического пространства называется набор открытых множеств $\{U_i\}$ такой, что $\bigcup_i U_i = U$. **Измельчением** покрытия $\{U_i\}$ называется покрытие $\{V_i\}$ такое, что каждое V_i лежит в каком-то из U_i.

Задача 1.3. Докажите, что любые два покрытия топологического пространства имеют одинаковое измельчение.

Определение 1.5. Покрытие $\{U_i\}$ многообразия называется **атласом**, если для каждого U_i задано отображение $\phi_i : \ U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, которое задает гомеоморфизм из U_i на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. **Отображения перехода** суть отображения

$$\Phi_{ij} : \ \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

индуцированные этими гомеоморфизмами. Атлас называется **гладким**, если все отображения перехода гладкие.

Задача 1.4. Пусть M – гладкое многообразие, а $\{U_i\}$ покрытие M, такое, что каждое U_i изоморфно $\mathbb{R}^n$ с пучком гладких функций на нем. Докажите, что $\{U_i\}$ – гладкий атлас M.

Указание. Воспользуйтесь задачей 1.1.

Определение 1.6. Пусть $\{U_i, \phi_i\}$ – гладкий атлас на многообразии M. Функция f на M называется **гладкой в координатах, заданных атласом** $\{U_i\}$, если $(\phi^{-1})^*(f\big|_{U_i})$ – гладкая функция для каждого i.

Задача 1.5. Докажите, что функции, гладкие в координатах, заданных атласом, образуют пучок.

Определение 1.7. Гладкие атласы эквивалентны, если соответствующие пучки гладких функций совпадают. **Гладкая структура** на многообразии есть класс эквивалентности гладких атласов.

Задача 1.6. Приведите пример двух неэквивалентных гладких структур на $\mathbb{R}$.

Задача 1.7. Докажите, что множество классов эквивалентности гладких структур на многообразии со счетной базой имеет мощность не больше континуума.

Задача 1.8 (!). Докажите, что гладкая структура на $\mathbb{R}$ единственна с точностью до изоморфизма.

Задача 1.9 (**). Докажите, что гладкая структура на S^2 единственна с точностью до изоморфизма.

Определение 1.8. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – топологическое многообразие с заданным на нем пучком функций. Оно называется **гладким многообразием класса C^i или C^∞**, если у каждой точки $(M, \mathcal{F})$ есть окрестность, изоморфная окольцованному пространству $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$. Многообразия класса гладкости C^0 называются **топологическими многообразиями**; это топологические пространства, локально гомеоморфные $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.10 (**). Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие класса гладкости C^1. Докажите, что у $\mathcal{F}$ есть подпучок $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ такой, что $(M, \mathcal{F})'$ – многообразие класса гладкости C^2.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Уитни о вложении.

1.2. Разбиение единицы

Определение 1.9. Пусть M – многообразие класса гладкости C^i или C^∞, а $\{U_i\}$ – локально конечное покрытие. **Разбиением единицы, подчиненным покрытию** $\{U_i\}$ называется набор функций $f_i: M \longrightarrow [0,1]$ того же класса гладкости, пронумерованный тем же набором индексов, что U_i, и удовлетворяющий следующим условиям.

(а) Каждая из функций f_i имеет компактный носитель и зануляется вне соответствующего U_i

(б) $\sum_i f_i = 1$

Задача 1.11. Докажите, что многообразие, допускающее разбиение единицы, метризуемо (допускает метрику, индуцирующую ту же топологию).

Задача 1.12 (!). Докажите, что каждое компактное топологическое многообразие допускает разбиение единицы.

Задача 1.13 (!). Пусть $Z, Z' \subset M$ – непересекающиеся замкнутые подмножества компактного топологического многообразия. Докажите, что найдется непрерывная функция, которая равна 1 на Z и 0 на Z'.

Задача 1.14 (*). Пусть $Z \subset M$ – подмногообразие компактного топологического многообразия. Докажите, что каждую непрерывную функцию $f: Z \longrightarrow \mathbb{R}$ можно продолжить до непрерывной функции $M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1.10. Пусть $(X, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Если для каких-то $x, y \in X$ имеет место $x \prec y$, $x = y$, либо $y \prec x$, мы говорим, что x и y **сравнимы**. Отношение $\prec$ называется **отношением линейного порядка** (total order), если любые два элемента сравнимы. Множество $(X, \prec)$ с отношением линейного порядка называется **линейно упорядоченное множество**.

Линейно упорядоченные множества также называются **монотонно упорядоченными**, или просто **упорядоченными**.

Определение 1.11. Пусть $(X, \prec)$ – линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ – его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется **минимальным**, если для любого $y \in Y$, имеем $y_0 \preccurlyeq y$. Линейно упорядоченное множество называется **вполне упорядоченным** (well-ordered set), если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется **отношение полного порядка**.

Определение 1.12. Два вполне упорядоченных множества называются **изоморфными**, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются **ординалами**, или же **ординальными числами**.

Замечание 1.5. Нетрудно доказать, что любые два ординала сравнимы: либо первый из них изоморфен начальному отрезку во втором, либо второй – начальному отрезку в первом. Это задает отношение линейного порядка на ординалах, превращая любой набор ординалов во вполне упорядоченное множество.

Определение 1.13. Минимальный несчетный ординал обозначается ω_1.

Определение 1.14. Луч Александрова есть множество $\mathbb{R}^{\geqslant 0} \times \omega_1$ снабженное линейным порядком и топологией, следующим образом. Если ординал ξ меньше ξ', то $(x, \xi) \prec (x', \xi')$, а если $\xi = \xi'$, то $(x, \xi) \prec (x', \xi')$ если $x < x'$. Базой топологии на луче Александрова являются интервалы вида $](x, \xi), (x', \xi')[$. **Прямая Александрова** есть объединение двух лучей, склеенное в нуле.

Задача 1.15. Докажите, что прямая Александрова является топологическим многообразием, а луч Александрова – многообразием с краем.

Задача 1.16. Докажите, что любая возрастающая последовательность на прямой Александрова сходится.

Задача 1.17. Докажите, что любая последовательность на прямой Александрова имеет сходящуюся подпоследовательность.

Задача 1.18 (!). Докажите, что прямая Александрова не компактна.

Задача 1.19 (!). Докажите, что прямая Александрова не метризуема.

Задача 1.20 (*). Докажите, что прямая Александрова не допускает разбиения единицы.

1.3. Векторные расслоения

Замечание 1.6. Начиная от настоящего момента, вы можете свободно пользоваться теоремой о существовании разбиения единицы на метризуемом гладком многообразии.

Определение 1.15. Пусть M – топологическое пространство. **Пучок** $\mathcal{F}$ на M это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** – гомоморфизмами $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$, заданными для каждого $U' \subset U$, и удовлетворяющие следующим свойствам.

(а) Композиция ограничений – снова ограничение: если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а

$$\mathcal{F}(U_1) \stackrel{\phi_{U_1,U_2}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_2) \stackrel{\phi_{U_2,U_3}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_3)$$

соответствующие им отображения ограничений, то $\phi_{U_1,U_2} \circ \phi_{U_2,U_3} = \phi_{U_1,U_3}$.

(б) Если $U \subset M$ есть объединение открытых множеств $U_i \subset U$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(в) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над** U. Отображение ограничения na U часто обозначается $f \longrightarrow f\Big|_U$

Замечание 1.7. Для пучка функций условия (а) и (б) выполняются автоматически.

Определение 1.16. Пространство глобальных сечений пучка $\mathcal{F}$ на M это $\mathcal{F}(M)$.

Задача 1.21. Постройте ненулевой пучок, у которого нулевое пространство глобальных сечений.

Замечание 1.8. Пусть $A: \ \phi \longrightarrow B$ – гомоморфизм колец, а V – B-модуль. Тогда на V есть естественная структура A-модуля, $av := \phi(a)v$.

Определение 1.17. Пусть $\mathcal{F}$ есть пучок функций, замкнутый относительно умножения, а $\mathcal{B}$ - пучок на топологическом пространстве M. Он называется **пучком $\mathcal{F}$-модулей**, если для каждого U, пространство сечений $\mathcal{B}(U)$ наделено структурой $\mathcal{F}(U)$-модуля, причем для каждого $U' \subset U$, отображение ограничения $\mathcal{B}(U) \stackrel{\phi_{U,U'}}{\longrightarrow} \mathcal{B}(U')$, задают гомоморфизм $\mathcal{F}(U)$-модулей (воспользуйтесь предыдущим замечанием, чтобы получить на $\mathcal{B}(U')$ структуру $\mathcal{F}(U)$-модуля).

Задача 1.22 (!). Пусть M – гладкое многообразие, а F – пучок $C^\infty M$-модулей, пространство глобальных сечений которого тривиально. Докажите, что F – нулевой пучок.

Определение 1.18. Тривиальный пучок модулей $\mathcal{F}^n$ над пучком функций $\mathcal{F}$ сопоставляет каждому U пучок $\mathcal{F}^n(U)$.

Определение 1.19. Локально тривиальный пучок модулей над пучком функций $\mathcal{F}$ это такой пучок $\mathcal{B}$, что у каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U такая, что ограничение $\mathcal{B}\Big|_U$ тривиально.

Определение 1.20. Векторное расслоение на гладком многообразии M есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

Задача 1.23 (*). Пусть B_1, B_2 – два векторных расслоения над M таких, что пространства сечений $B_1(M)$ и $B_2(M)$ изоморфны как $C^\infty(M)$-модули. Докажите, что B_1 и B_2 изоморфны.

Определение 1.21. Пусть G – группа, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор функций $U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_{ij}} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ 2. $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$.

Задача 1.24. Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_{ij}} G$ – 1-коцикл. Рассмотрим набор отображений $\psi_i : U_i \longrightarrow G$, и пусть $\phi'_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ – отображение, заданное формулой $\phi'_{ij} = \psi_i^{-1}\phi_{ij}\psi_j$. Докажите, что это тоже коцикл.

Определение 1.22. Два 1-коцикла называются **когpаничными**, если один из них получен из другого вышеописанной процедурой.

Задача 1.25. Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $\mathfrak{G}$ – группа всех отображений $\coprod U_i \longrightarrow G$. Постройте действие $\mathfrak{G}$ на множестве 1-коциклов, таким образом, что когpаничные 1-коциклы лежат в одной орбите $\mathfrak{G}$.

Задача 1.26. Пусть B – n-мерное векторное расслоение над M, а $\{U_i\}$ – покрытие M, такое, что $B\Big|_{U_i}$ – тривиальный C^∞-модуль. Зафиксируем тривиализации $B\Big|_{U_i}$ и рассмотрим базисы в $B\Big|_{U_i}$ и $B\Big|_{U_j}$, определенные этими тривиализациями. Пусть $U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_{ij}} GL(n)$ – функции перехода от одного базиса к другому.

а. Докажите, что ϕ_{ij} задает 1-коцикл.

б. Докажите, что два расслоения изоморфны $\Leftrightarrow$ соответствующие коциклы когpаничны.

Задача 1.27. Докажите, что векторное расслоение однозначно задается покрытием, где оно тривиализованно, и функциями перехода, удовлетворяющими уравнению коцикла.

Задача 1.28 (*). Постройте нетривиальное векторное расслоение B над каким-нибудь многообразием M, такое, что прямая сумма B и тривиального расслоения тривиальна.

Задача 1.29 (*). Пусть M – компактное четномерное многообразие. Постройте нетривиальное векторное расслоение над M.