Векторные расслоения 2: локальные операторы и дифференцирования

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

2.1. Локальные операторы и дифференциальные операторы

Здесь решается такая задача. Пусть на пространстве сечений расслоения задан какой-то оператор. Как продолжить его на соответствующий пучок? Оказывается, достаточно свойства локальности.

Определение 2.1. Пусть $f \in F(M)$ – сечение пучка F над M. **Носитель** f есть множество всех точек $x \in M$ таких, что для любой окрестности $U \ni x$, ограничение f на U ненулевое. Носитель обозначается $\sup(f)$.

Задача 2.1. Докажите, что носитель - замкнутое множество.

Задача 2.2. Пусть $\mathcal{O}$ – пучок комплексно-аналитических функций на $\mathbb{C}$, а $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ – ненулевое сечение. Найдите $\sup(f)$.

Определение 2.2. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – пучки F и G – пространства их сечений над M. Линейное над базовым полем отображение $\phi: F \longrightarrow G$ называется **локальным**, если носитель $\phi(f)$ лежит в носителе f для любого $f \in F$.

Задача 2.3. Докажите, что взятие производной вдоль векторного поля есть локальное отображение из $C^\infty M$ в $C^\infty M$.

Задача 2.4 (!). Пусть M – метризуемое многообразие (в частности, допускающее разбиение единицы). $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – пучки $C^\infty M$-модулей, а F и G – пространства их сечений над M. Докажите, что любое $C^\infty M$-линейное отображение из F в G локально.

Задача 2.5. Докажите, что любое k-линейное отображение $\phi: C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\phi(xy) = \phi(x)y + x\phi(y)$, локально.[1]

Задача 2.6 (*). Обозначим за C^0 пучок непрерывных функций, и пусть $C^0 M$ – кольцо непрерывных функций на многообразии. Докажите, что любой локальный оператор $C^0 M \longrightarrow C^0 M$ $C^0 M$-линейный, или найдите контрпример.

Задача 2.7 (**). Докажите, что любой локальный оператор $C^1 M \longrightarrow C^1 M$ $C^1 M$-линейный, или найдите контрпример.

[1] Такие отображения называются **дифференцированиями**.

Определение 2.3. **Алгебра дифференциальных операторов** на $C^\infty M$ есть алгебра, порожденная операциями умножения на функцию и взятия производных вдоль векторного поля.

Задача 2.8. Докажите, что любой дифференциальный оператор является локальным.

Задача 2.9 (**). Пусть M – компактное многообразие. Докажите, что любой локальный оператор на $C^\infty M$ – дифференциальный.

Задача 2.10 (*). Пусть M – некомпактное многообразие. Найдите локальный оператор на $C^\infty M$, который не задается никаким дифференциальным оператором.

Определение 2.4. **Дифференциальный оператор порядка** $\leqslant i$ есть эндоморфизм $D \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$, полученный как линейная комбинация выражений вида $\operatorname{Lie}_{X_1} \operatorname{Lie}_{X_2} ... \operatorname{Lie}_{X_d}$, где $d \leqslant i$, X_i – векторные поля, а Lie_{X_i} – дифференцирования вдоль этих векторных полей.

Задача 2.11 (*). Обозначим за $\operatorname{Diff}^i(M)$ пространство дифференциальных операторов порядка $\leqslant i$. Пусть D есть оператор такой, что для любого векторного поля X, коммутатор D и оператора Lie_X взятия производной вдоль X лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(M)$. Докажите, что $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$.

2.2. Продолжение локального оператора на пучок

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – пучки на многообразии M, $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{G}(M)$ – пространство сечений. Оператор $\phi: \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(M)$ называется **локальным**, если если носитель $\phi(f)$ лежит в носителе f для любого $f \in \mathcal{F}(M)$. Оператор ϕ **продолжается на пучок**, если существует морфизм пучков $\tilde{\phi}: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ такой, что $\tilde{\phi}\Big|_{\mathcal{F}(M)} = \phi$.

Замечание 2.1. В этом разделе мы доказываем, что для пучков $C^\infty M$-модулей эти условия равносильны.

Задача 2.12. Пусть $f \in \mathcal{F}(M)$ – сечение, которое равно нулю на $U \subset M$, а $\phi: \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(M)$ – оператор, который продолжается на пучок. Докажите, что $\phi(f)$ тоже равно нулю на $U \subset M$.

Задача 2.13 (!). Пусть $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ – пучки $C^\infty M$-модулей, а $\phi: \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(M)$ – оператор, который продолжается на пучок. Докажите, что он локальный.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.14. Пусть $U \subset M$ – открытое подмножество, $\mathcal{F}$ пучок, а $f \in \mathcal{F}(U)$ – сечение с компактным носителем. Докажите, что существует единственное сечение $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$, удовлетворяющее $\sup(\tilde{f}) = \sup(f)$ и $\tilde{f}\Big|_U = f$.

Определение 2.6. Говорится, что **сечение** $f \in \mathcal{F}(U)$ **продолжается с** U **на** M, если найдется $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$, удовлетворяющее $\tilde{f}\Big|_U = f$.

Определение 2.7. Говорится, что **пучок $\mathcal{F}$ допускает разбиение единицы**, если для любого открытого $U \subset M$, $f \in \mathcal{F}(U)$, и любого локально конечного покрытия $\{U_i\}$ множества U, найдется набор сечений f_i с носителями в U_i такой, что $f = \sum f_i$.

Замечание 2.2. Чтобы придать смысл бесконечной сумме $f = \sum f_i$, воспользуйтесь локальной конечностью покрытия.

Задача 2.15. Докажите, что любой пучок $C^\infty M$-модулей допускает разбиение единицы.

Задача 2.16 (!). Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ – пучки на M, причем $\mathcal{F}$ допускает разбиение единицы, а $\phi: \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{G}(M)$ – локальный оператор. Докажите, что ϕ продолжается на пучок.

Указание. Выведите из локальности ϕ то, что сумма $\sum \phi(f_i)$ корректно определена.

Задача 2.17. Докажите, что любой дифференциальный оператор $\phi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$ продолжается на пучок.

Задача 2.18 (!). Докажите, что дифференцирования кольца гладких функций на многообразии M образуют пучок.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

2.3. Дифференцирования кольца

Замечание 2.3. Все кольца в этих листочках предполагаются коммутативными и с единицей. Алгебры над полем – ассоциативные, но не обязательно коммутативные (например, матричная алгебра). Дифференцирование на кольце над k есть k-линейное отображение δ, удовлетворяющее $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$.

Задача 2.19. Пусть D_1, D_2 - дифференцирования. Докажите, что коммутатор $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$ это тоже дифференцирование.

Задача 2.20. Пусть $D \in \operatorname{Der}_k(R)$ – дифференцирование кольца, $I \subset R$ – идеал. Докажите, что $D(I^k) \subset I^{k-1}$.

Замечание 2.4. Пусть R – кольцо над полем k. Тогда $\operatorname{Der}_k(R)$ – модуль над кольцом R, структура R-модуля определяется формулой $rD(f) = rD(f)$.

Задача 2.21. Пусть $R = k[t_1, .., t_k]$ – кольцо полиномов. Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R)$ – свободный модуль, изоморфный R^n, с образующими $\frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, ..., \frac{d}{dt_n}$

Указание. Постройте отображение $\operatorname{Der}_k(R) \longrightarrow R^n$,

$$D \longrightarrow (D(t_1), D(t_2), ..., D(t_n))$$

и докажите, что это изоморфизм.

Задача 2.22. Докажите **лемму Адамара:** каждая гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ разлагается в сумму $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$, где x_i – координатные функции, а $g_i \in C^\infty\mathbb{R}^n$.

Задача 2.23. Обозначим за $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty\mathbb{R}^n$ идеал всех функций, зануляющихся в $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что он максимальный.

Задача 2.24 (!). Докажите, что любая функция $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$, зануляющаяся в x, и такая, что $f'(x) = 0$, лежит в идеале $\mathfrak{m}_x^2$.

Указание. Воспользуйтесь леммой Адамара.

Определение 2.8. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ координаты $t_1, ..., t_n$. Определим отображение

$$\operatorname{Der}(C^\infty\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\ \Pi\ } (C^\infty\mathbb{R}^n)^n,$$

$D \longrightarrow (D(t_1), D(t_2), ..., D(t_n))$.

Задача 2.25. Докажите, что Π – наложение.

Замечание 2.5. **Аффинная функция** на $\mathbb{R}^n$ есть сумма линейной функции и константы.

Задача 2.26. Пусть $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$. Докажите, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется аффинная функция l такая, что $f - l \in \mathfrak{m}_x^2$

Указание. Воспользуйтесь леммой Адамара.

Задача 2.27. Пусть $D \in \ker\Pi$. Докажите, что для каждой функции $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место $D(f) \in \mathfrak{m}_x$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 2.28 (!). Докажите, что отображение

$$\operatorname{Der}(C^\infty\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\ \Pi\ } (C^\infty\mathbb{R}^n)^n$$

есть изоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.29. Докажите, что пучок $\operatorname{Der}(C^\infty M)$ дифференцирований кольца $C^\infty M$ (определенный в задаче 2.18) локально свободен как пучок $C^\infty M$-модулей.

Определение 2.9. Пучок $\operatorname{Der}(C^\infty M)$ называется **касательным расслоением** многообразия M.

Задача 2.30 (*). Найдите нетривиальный элемент $\gamma \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^0\mathbb{R})$ в пространстве дифференцирований кольца непрерывных функций, или докажите, что оно пусто.

Задача 2.31 (**). Найдите нетривиальный элемент $\gamma \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^1\mathbb{R})$ в пространстве дифференцирований кольца функций класса C^1, или докажите, что оно пусто.