Векторные расслоения 6: кручение и связность Леви-Чивита

6.1. Коммутаторы и дифференциал де Рама

Определение 6.1. Векторные поля определяются как дифференцирования кольца гладких функций; их коммутатор - коммутатор дифференцирований, то есть тоже дифференцирование (векторное поле).

Задача 6.1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, с координатами $t_1, ..., t_n$. Рассмотрим векторные поля $X = \sum_i f_i \frac{d}{dt_i}$ и $Y = \sum_i g_i \frac{d}{dt_i}$. Докажите, что

$$[X, Y] = \sum_{i,j} f_i \frac{dg_j}{dt_i} \frac{d}{dt_j} - g_i \frac{df_j}{dt_i} \frac{d}{dt_j}.$$

Задача 6.2. Пусть X, Y – векторные поля, f – функция. Докажите, что $[X, fY] = f[X, Y] + \operatorname{Lie}_X f \cdot Y$.

Задача 6.3. Пусть $\rho \in \Lambda^n M$. Рассмотрим оператор d_C, переводящий ρ в $(n+1)$-форму

$$\begin{aligned} d_C(\rho)(X_1, ..., X_{n+1}) = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \operatorname{Lie}_{X_i}(\rho(X_1, ..., \check{X}_i, ..., X_{n+1})) \\ & - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{i+j} \rho([X_i, X_j], X_1, ..., \check{X}_i, ..., \check{X}_j, ..., X_{n+1}), \end{aligned}$$

где $\check{X}_j$ означает, что мы выкинули X_j из последовательности аргументов $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$. Докажите, что $d_C(\rho)$ $C^\infty M$-линейна по аргументам $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.4 (!). Докажите, что d_C удовлетворяет тождеству Лейбница и равен обычному дифференциалу на функциях.

Задача 6.5 (!). Докажите, что $d_C^2 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь тождеством Якоби: $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

Задача 6.6. Докажите, что d_C равен дифференциалу де Рама.

Указание. Воспользуйтесь задачами 6.4 и 6.5.

6.2. Комплекс Шевалле

Определение 6.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, а $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$ – алгебра Грассмана кососимметричных форм на $\mathfrak{g}$. **Дифференциал Шевалле** на $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$ переводит форму ρ в

$$d_C(\rho) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{i+j} \rho([X_i, X_j], X_1, ..., \check{X}_i, ..., \check{X}_j, ..., X_{n+1}).$$

Задача 6.7. Докажите, что дифференциал Шевалле удовлетворяет $d_C^2 = 0$.

Определение 6.3. Когомологии алгебры Ли это когомологии комплекса $(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_C)$.

Определение 6.4. Группа Ли есть топологическая группа, снабженная структурой гладкого многообразия, таким образом, что групповые операции задаются гладкими отображениями. Векторное поле на группе Ли называется **левоинвариантным**, если оно переводится в себя операциями левого сдвига $L_g(x) = gx$. Дифференциальная форма α **левоинвариантна,** если $L_g^* \alpha = \alpha$.

Задача 6.8. Докажите, что коммутатор левоинвариантных векторных полей на группе Ли левоинвариантен.

Задача 6.9. Пусть G – группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на G.

а. Постройте изоморфизм $\mathfrak{g} = T_e G$.

б. Докажите, что пространство $(\Lambda^* G)^G$ левоинвариантных дифференциальных форм на G изоморфно $\Lambda^* \mathfrak{g}^*$.

Задача 6.10. а. Докажите, что дифференциал де Рама переводит левоинвариантные дифференциальные формы в левоинвариантные.

б. (!) Докажите, что при изоморфизме $(\Lambda^* G)^G \cong \Lambda^* \mathfrak{g}^*$ дифференциал де Рама переходит в дифференциал Шевалле.

Задача 6.11. Пусть G - группа Ли. Рассмотрим гомоморфизм $\psi: \ H^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^*(G)$ из когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в когомологии де Рама G, построенный в предыдущей задаче.

а. (*) Докажите, что это изоморфизм для компактных групп Ли.

б. (!) Постройте группу Ли G такую, что $H^i(\mathfrak{g}) = 0$, а $H^i(G, \mathbb{R}) \neq 0$ для какого-то $i > 0$.

в. (*) Постройте группу Ли G такую, что $H^i(\mathfrak{g}) \neq 0$, а $H^i(G, \mathbb{R}) = 0$ для какого-то $i > 0$.

6.3. Кручение

Определение 6.5. Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 M \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla(\eta) = d(\eta) - \mathsf{Alt} \circ \nabla(\eta)$, где $\mathsf{Alt}: \ \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

Задача 6.12. Докажите, что T_∇ $C^\infty M$-линейно.

Задача 6.13. Докажите, что любая связность на $M = \mathbb{R}$ имеет нулевое кручение.

Задача 6.14 (!). Постройте связность на $M = \mathbb{R}^2$ с ненулевым кручением.

Задача 6.15. Пусть ∇ – связность на TM. Определим $T^*_\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, где $X, Y \in TM$. Докажите, что $T^*_\nabla(X,Y)$ $C^\infty M$-линейно по обоим аргументам.

Задача 6.16. Докажите, что $\eta(T^*_\nabla(X,Y)) = \eta([X,Y]) - \langle \nabla_X \eta, Y\rangle + \langle \nabla_Y \eta, X\rangle$.

Задача 6.17. Пусть $\eta \in \Lambda^1 M$. Докажите следующую формулу Картана:

$$d\eta(X,Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]).$$

Задача 6.18 (!). Докажите, что два выражения для кручения равны: $T^*_\nabla(X,Y) = T_\nabla(X,Y)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.19 (*). На каком-нибудь многообразии M найдите связность ∇ с ненулевым кручением T_∇, которое удовлетворяет $\nabla(T_\nabla) = 0$. Здесь T_∇ рассматривается как сечение расслоения $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$, на которое ∇ продолжается как обычно (по формуле Лейбница).

Определение 6.6. Связность без кручения есть связность на TM с нулевым кручением. Такая связность иногда называется **симметрической**.

Задача 6.20. Докажите, что пространство связностей без кручения – аффинное пространство с линеаризацией $\mathsf{Sym}^2 T^*M \otimes TM$.

Задача 6.21. Пусть $\nabla : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на расслоении B. Докажите, что ∇ можно продолжить до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \dots \tag{6.1}$$

таким образом, что $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$ (в этой задаче надо проверить корректность оператора, определенного этой формулой)

Задача 6.22 (*). Рассмотрим оператор $d_\nabla : \Lambda^i(M) \otimes TM \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M) \otimes TM$ заданного как в (6.1) при $B = TM$, и пусть $\mathsf{Id} \in \Lambda^1(M) \otimes TM$ – тождественный эндоморфизм. Докажите, что $T_\nabla = d_\nabla(\mathsf{Id})$.

Задача 6.23 (**). Пусть M – многообразие со связностью $TM \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes TM$. Предположим, что TM тривиализовано сечениями $v_1, \dots v_n$, а $\nabla v_i = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $\gamma : [0,1]$ – петля, переводящая концы отрезка в $x \in M$, а $\pi : TM \longrightarrow M$ стандартная проекция. Рассмотрим путь $\tilde\gamma : [0,1] \longrightarrow TM$ такой, что $\pi(\tilde\gamma)(t) = \gamma(t)$. В силу свойств параллельного переноса вдоль связности, решение уравнения $\nabla_{\dot\gamma}\tilde\gamma = 0$ с начальным условием $\tilde\gamma(0) = v \in T_x M$ единственно. Докажите, что следующие условия равносильны:

- $\tilde\gamma(1) = \tilde\gamma(0)$ для всех петель γ и всех $\tilde\gamma$, полученных решением уравнения $\nabla_{\dot\gamma}\tilde\gamma = 0$.
- $T_\nabla = 0$.

6.4. Связность Леви-Чивита

Определение 6.7. Пусть (M, g) – риманово многообразие, $g \in \mathsf{Sym}^2 T^*M$. Связность ∇ называется **ортогональной**, если $\nabla g = 0$.

Задача 6.24. Докажите существование ортогональной связности на любом римановом многообразии.

Задача 6.25. Докажите, что пространство $\mathcal{A}_g$ ортогональных связностей является аффинным пространством над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.

Задача 6.26. Докажите, что отображение $T_\nabla : \ \mathcal{A}_g \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$, переводящее связность в ее кручение, является морфизмом аффинных пространств.

Задача 6.27 (!). Докажите, что линеаризация T_{lin} отображения $T_\nabla : \ \mathcal{A}_g \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$ $C^\infty M$-линейна, и переводит $\xi \in \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ в кососимметризацию ξ по первым двум аргументам.

Задача 6.28. Докажите, что ядро $T_{\mathsf{lin}} : \ \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$ состоит из тензоров, симметричных по первым двум аргументам.

Определение 6.8. Размерность слоев расслоение называется **ранг**, и обозначается $\mathsf{rk}\, B$.

Задача 6.29. Докажите, что $\mathsf{rk}\, \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \frac{n^2(n-1)}{2}$ и $\mathsf{rk}\, \Lambda^2 M \otimes TM = \frac{n^2(n-1)}{2}$.

Задача 6.30. Пусть $\xi \in V \otimes V \otimes V$ – тензор, который симметричен по первым двум аргументам, и кососимметричен по последним двум. Докажите, что $\xi = 0$.

Задача 6.31 (!). Докажите, что $T_{\mathsf{lin}} : \ \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$ – изоморфизм.

Указание. Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что ядро этого отображения пусто, а размерности слоев одинаковы.

Определение 6.9. **Связность Леви-Чивита** на римановом многообразии есть ортогональная связность без кручения.

Задача 6.32 (!). Пусть M – риманово многообразие. Докажите, что связность Леви-Чивита существует и единственна.

Определение 6.10. Невырожденная дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^2 M$ называется **симплектической**, если $d\omega = 0$.

Задача 6.33. Пусть $\omega \in \Lambda^2 M$ – невырожденная дифференциальная форма на многообразии M.

а. (*) Пусть существует связность без кручения, сохраняющая ω. Докажите, что ω симплектична.

б. (*) Пусть ω симплектична. Докажите, что существует связность без кручения, сохраняющая ω.