Векторные расслоения 7: кривизна

7.1. Определение кривизны

Задача 7.1. Пусть $\nabla : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на гладком расслоении. Докажите, что ∇ можно продолжить до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} ... \tag{7.1}$$

таким образом, что $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$ (в этой задаче надо проверить корректность оператора, определенного этой формулой)

Задача 7.2. Докажите, что оператор $\nabla^2 : \Lambda^i(M) \otimes B \longrightarrow \Lambda^{i+2}(M) \otimes B$ в (7.1) является $C^\infty M$-линейным.

Задача 7.3 (!). Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Докажите, что оператор

$$\Theta_B(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

$C^\infty M$-линеен по всем трем аргументам.

Задача 7.4. Обозначим за $i_X : \Lambda^i M \otimes B \longrightarrow \Lambda^{i-1} M \otimes B$ подстановку векторного поля X. Докажите, что $[\nabla_X, i_Y] = [\mathrm{Lie}_X, i_Y] = i_{[X,Y]} = 0$.

Задача 7.5. Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение.

а. Докажите, что $\nabla^2(b)(X, Y) = (i_X i_Y - i_X i_Y)\nabla^2(b)$, а $\Theta_B(X, Y)(b) = i_Y \nabla i_X \nabla(b) - i_Y \nabla i_X \nabla(b)$.

б. (!) Докажите, что $\Theta_B(X, Y)(b) = \nabla^2(b)(X, Y)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

7.2. Потоки диффеоморфизмов

Определение 7.1. Пусть $X \in TM$ – векторное поле на многообразии, а $\Psi_t : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ соответствующий поток диффеоморфизмов, такой, что $\Psi_t^{-1} \frac{d\Psi_t}{dt} = X$. Обозначим Ψ_t за $\exp(tX)$. Этот поток иногда называют **экспонентой** X.

Задача 7.6. а. (*) Докажите, что $\exp(tX)$ всегда существует, если M компактно.

б. (**) Докажите, что на любом некомпактном многообразии существует векторное поле X такое, что $\exp(tX)$ не существует ни на каком непустом отрезке $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

Определение 7.2. Пусть $\Psi : M \longrightarrow M$ – диффеоморфизм, а X – векторное поле. Рассмотрим дифференцирование $(\Psi_* X)(f) := \Psi^{-1} \mathrm{Lie}_X \Psi^*(f)$. Поскольку векторные поля это дифференцирования, $\Psi_* X$ это тоже векторное поле.

Задача 7.7. Докажите, что $\Psi_* X$ в точке $z \in M$ равно $D\Psi_t \left(X \Big|_{\Psi_t^{-1}(z)} \right)$.

Задача 7.8. Пусть $X, Y \in TM$ векторные поля. Докажите, что $\frac{\exp(tX)_* Y}{dt} = [X, Y]$.

Задача 7.9 (!). Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, которые коммутируют. Докажите, что потоки диффеоморфизмов $\exp(tX)$ и $\exp(tY)$ тоже коммутируют.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.10. Докажите, что $\exp(tX)^* f = \sum_{i=0}^n t^i \frac{\operatorname{Lie}_X^i f}{i!} + t^{n+1} C$, где $|C| \leqslant \sup_M \frac{\operatorname{Lie}_X^{n+1} f}{(n+1)!}$.

7.3. Кривизна и голономия

Задача 7.11. Пусть X – векторное поле на многообразии, $\exp(tX) : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ соответствующий поток диффеоморфизмов, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а $\Phi_t : B \longrightarrow B$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль кривой $\exp(tX)(x)$.

а. Докажите, что $\nabla_X(b) = \Phi_t \frac{\Phi_t(b)}{dt}\Big|_{t=0}$ для любого $b \in B$.

б. (!) Докажите, что $\nabla_X(b) = \Phi_t^{-1} \frac{\Phi_t(b)}{dt}$ для всех $B \in B, t \in \mathbb{R}$.

Определение 7.3. Оператор Ψ_t, построенный выше, называется **оператором параллельного переноса по связности вдоль** X, или **оператором голономии**, и обозначается $\exp(t\nabla_X)$.

Задача 7.12. Пусть $X, Y \in TM$ – коммутирующие векторные поля на M, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $\exp(t\nabla_X)$ – соответствующий оператор параллельного переноса.

а. Докажите, что $\frac{d\nabla_Y \exp(t\nabla_X)}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla_Y \nabla_X$.

б. (!) Докажите, что $\frac{d\nabla_Y \exp(t\nabla_X)}{dt} = \nabla_Y \nabla_X(\exp(t\nabla_X)(b))$.

Задача 7.13 (!). Докажите, что $\exp(t\nabla_X)(b) = \sum_{i=0}^n t^i \frac{\nabla_X^i b}{i!} + t^{n+1} C$, где $|C| \leqslant \sup_M \frac{\nabla_X^{n+1} b}{(n+1)!}$.

Задача 7.14 (!). Пусть X, Y – коммутирующие векторные поля, а $e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y}$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$ (то есть преобразование голономии, соответствующее обходу этого контура). Докажите, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\Bigg[\exp(\varepsilon\nabla_X)\exp(\varepsilon\nabla_Y)\exp(-\varepsilon\nabla_X)\exp(-\varepsilon\nabla_Y)\Bigg](b) = \Theta(X, Y)(b),$$

где $\Theta(X, Y)$ – кривизна связности ∇.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.15. Докажите, что голономия обхода по контуру ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$. тривиальна для всех ε тогда и только тогда, когда $\Theta(X, Y) = 0$.

Задача 7.16 (!). Пусть X, Y – коммутирующие векторные поля, а $h_\varepsilon := e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_{X+Y}}$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль треугольника $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon(X+Y)$. Докажите, что $h_\varepsilon = 1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\Theta(X,Y)(b)+\varepsilon^3\delta$, где $|\delta|$ ограничен константой C, которая не зависит от ε.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.13.

7.4. Топология на пространстве гладких путей

Определение 7.4. Пусть $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ – гладкий путь в $M = \mathbb{R}^n$, а

$$\gamma^{(k)}: [0,1] \longrightarrow TM = \mathbb{R}^n$$

– k-я производная отображения γ. Определим на пространстве путей $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ **C^r-метрику** d_{C^r} формулой

$$d_{C^r}(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_{z\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \|\gamma_1^{(i)}(z) - \gamma_2^{(i)}(z)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма на TM, индуцированная плоской римановой метрикой на $M = \mathbb{R}^n$. Соответствующая топология называется **C^r-топологией.**

Задача 7.17. Докажите, что пространство путей гладкости C^r полно в C^r-метрике.

Задача 7.18. Пусть на пространстве путей с C^r-топологией задано отображение, которое переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся. Докажите, что оно непрерывно.

Замечание 7.1. При решении задач этого и следующего раздела, удобно пользоваться этим утверждением, выводя непрерывность отображений из сходимости последовательностей.

Задача 7.19. Пусть $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм. Докажите, что соответствующее отображение на пространстве путей с C^r-топологией задает гомеоморфизм.

а. Для $r = 0$.

б. (!) Для $r = 1$.

в. (*) Для всех r.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 7.5. Пусть M – многообразие, а $\operatorname{Map}([a,b], M)$ пространство путей. Зафиксируем атлас $\{U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{R}^n\}$ на M. Разбив заданные пути γ, γ' в объединение путей $\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}$, $\gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}$, которые лежат в картах $U_i \cong \mathbb{R}^n$, определим $d_{C^r}(\gamma,\gamma')$ как

$$d_{C^r}(\gamma,\gamma') := \inf \sum_i d_{C^r}\left(\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}, \gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}\right), \tag{7.2}$$

где инфимум взят по всем разбиениям и картам из атласа, а каждое из слагаемых $d_{C^r}\left(\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}, \gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}\right)$ вычислено в своей карте U_i.

Задача 7.20. Докажите, что таким образом определенное d_{C^r} задает метрику.

Задача 7.21. Докажите, что топология пространетве путей, определенная d_{C^r} по формуле (7.2), не зависит от выбора диффеоморфизмов $U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{R}^n$

а. Для $r = 0$.

б. Для $r = 1$.

в. (*) Для всех r.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.19.

Задача 7.22. Докажите, что топология на пространстве путей, определенная d_{C^r} по формуле (7.2), не меняется при переходе к измельчению покрытия.

Задача 7.23. Докажите, что топология пространетве путей, определенная d_{C^r} по формуле (7.2), не зависит от выбора покрытия

а. Для $r = 0$.

б. Для $r = 1$.

в. (*) Для всех r.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.24. Рассмотрим функцию $\mathcal{L} : \operatorname{Map}([a,b], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, ставящую в соответствие каждому пути его длину. Докажите, что $\mathcal{L}$ разрывна в C^0-топологии.

Задача 7.25 (*). Пусть $\alpha \in \Lambda^1\mathbb{R}^n$ – 1-форма (не обязательно замкнутая), а

$$I_\alpha : \operatorname{Map}([a,b], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ставит в соответствие пути γ интеграл $\int_\gamma \alpha$.

(*) Предположим, что α – гладкая 1-форма. Докажите, что I_α непрерывна в C^0-топологии на пространстве путей с ограниченной производной, или найдите контрпример.

(**) Предположим, что α – непрерывная 1-форма (с непрерывными коэффициентами). Докажите, что I_α непрерывна в C^0-топологии на пространстве путей с ограниченной производной, или найдите контрпример.

7.5. Зависимость голономии от контура

Задача 7.26. Пусть $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – векторнозначная функция, $A_t : [0,1] \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ – эндоморфизм, зависящий от параметра $t \in [0,1]$, а $f' = A_t(f)$ – дифференциальное уравнение. Рассмотрим функцию $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, ставящую точке $t \in [0,1]$ в соответствие операторную норму (максимальное собственное значение) $A(t)$. Пусть $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ преобразование, которое ставит начальному условию $f(0)$ значение $f(1)$ решения уравнения $f' = A_t(f)$, а α_i – собственные значения h. Докажите, что $|\log \alpha_i| \leqslant \int_{[0,1]} \alpha(t)$.

Задача 7.27. Пусть (B, ∇_0) – тривиальное расслоение над M с тривиальной связностью $\nabla_0(\sum_i f_i b_i) = \sum_i df_i \otimes b_i$, а $\nabla := \nabla_0 + A$ – еще одна связность. Рассмотрим петлю γ в M, и пусть h_γ – соответствующее преобразование голономии, индуцированное ∇. Рассмотрим функцию $\alpha : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, ставящую точке $t \in [0,1]$ в соответствие операторную норму (максимальное собственное значение) $A(\dot\gamma(t))$. Докажите, что собственные значения α_i оператора h_γ удовлетворяют $|\log \alpha_i| \leqslant \int_\gamma \alpha(t) dt$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.28 (!). Пусть W_x – пространство кусочно-гладких петель с началом и концом в $x \in M$, (B, ∇) – расслоение со связностью, а h_γ – соответствующее преобразование голономии. Докажите, что h_γ непрерывно в C^1-топологии на W_x.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 7.2. Цель оставшихся задач листочка - доказать, что h_γ непрерывно в C^0-топологии (при условии, что производная γ ограничена).

Задача 7.29. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ_ε – путь, обходящий границы плоского треугольника со сторонами, которые равны векторам $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon(X+Y) \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что γ_ε лежит в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что $\gamma_\varepsilon = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Theta(X,Y) + \varepsilon^3 \delta$, где $|\delta|$ ограничен константой, которая зависит от X, Y, K, B, ∇, и не зависит от выбора треугольника γ_ε.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.16.

Задача 7.30 (!). Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – путь, обходящий границы плоского треугольника D со сторонами, которые равны векторам $X, Y, -(X+Y) \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что собственные значения α_i соответствующего преобразования голономии удовлетворяют

$$|\log \alpha_i| \leqslant \sup_{z \in D} \left\| \Theta(X,Y)\Big|_z \right\|,$$

где $\Theta(X,Y)\Big|_z \in \operatorname{End}\left(B\Big|_z\right)$ – значение кривизны в z, а $\left\|\Theta(X,Y)\Big|_z\right\|$ ее операторная норма, то есть максимум модуля собственных значений.

Указание. Разбейте треугольник γ в объединение треугольников γ_ε со сторонами $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon(X+Y) \in \mathbb{R}^n$, и примените предыдущую задачу.

Задача 7.31. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ_i – последовательность путей, обходящих границы плоского треугольника D_i, с началом и концом в $z \in M$. Предположим, что площадь треугольников D_i стремится к нулю, а все D_i лежат в заданном компакте K. Обозначим за $h_{\gamma_i} \in \operatorname{End}(B\Big|_z)$ соответствующие преобразования голономии. Докажите, что $\lim_i h_{\gamma_i} = \mathsf{Id}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.32. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – путь, обходящий границы плоского треугольника D, с началом и концом в $z \in M$. Докажите, что соответствующее преобразование голономии непрерывно в C^0-топологии как функция γ.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.33 (!). Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – кусочно-линейная петля с началом и концом в $z \in M$. Докажите, что соответствующее преобразование голономии непрерывно в C^0-топологии как функция γ, если $|\dot\gamma| < C$ (производная γ ограничена константой).

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.34. Докажите, что каждый гладкий путь в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить в C^1-топологии последовательностью кусочно-линейных.

Задача 7.35. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – кусочно-гладкая петля с началом и концом в $z \in M$, лежащая в компакте K. Докажите, что для каждой кусочно-гладкой петли γ' такой, что $d_{C^1}(\gamma, \gamma') < \varepsilon$, соответствующие преобразования голономии удовлетворяют $\|h_\gamma - h_{\gamma'}\| < C\varepsilon$, где C – какая-то константа, зависящая от B, ∇, K, и не зависящая от γ, γ' и ε.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.27.

Задача 7.36 (!). Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – кусочно-гладкая петля с началом и концом в $z \in M$. Докажите, что соответствующее преобразование голономии непрерывно в C^0-топологии как функция γ, если $|\dot\gamma| < C$ (производная γ ограничена константой).

Указание. Возьмите последовательность γ_i кусочно-гладких путей, сходящуюся к γ в C^0-топологии, и пусть γ_i' – последовательность кусочно-линейных путей, такая, что $d_{C^1}(\gamma_i, \gamma_i') < \varepsilon_i$, где ε_i сходится к нулю. Примените предыдущую задачу, чтобы убедиться, что $h_{\gamma_i'}$ сходится к тому же пределу, что и h_{γ_i}, и этот предел равен h_γ.

Задача 7.37 (!). Пусть M – любое многообразие (не обязательно $\mathbb{R}^n$), (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а W_z – пространство кусочно-гладких петель γ с началом и концом в $z \in M$. Докажите, что голономия h_γ непрерывна как функция γ в C^0-топологии.

Задача 7.38 (!). Пусть M – односвязное многообразие, а (B, ∇) – расслоение со связностью. Докажите, что голономия ∇ вдоль любого пути тривиальна тогда и только тогда, когда кривизна B равна нулю.