Векторные расслоения 8: главные расслоения

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

8.1. Топология фактора

Определение 8.1. Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается $M/\!\sim$. На $M/\!\sim$ вводится **топология фактора**: открытые подмножества $M/\!\sim$ - такие подмножества, прообраз которых в M открыт. Если на M действует группа G, возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$ если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством** M **по действию** G, и обозначается M/G. Классы эквивалентности называются G**-орбитами** в M.

Задача 8.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а G – конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y – две точки, не принадлежащие одной и той же G-орбите. Найдите у x, y непересекающиеся G-инвариантные окрестности U, U', и возьмите $\bigcap_{g\in G} gU$, $\bigcap_{g\in G} gU'$.

Задача 8.2. Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, не конечна).

8.2. Главные расслоения

Определение 8.2. Пусть G – топологическая группа. Действие $G\times M$ на топологическом пространстве **непрерывно**, если отображение $G\times M \longrightarrow M$ непрерывно.

Задача 8.3. Пусть G – топологическая группа, которая свободно действует на хаусдорфовом пространстве M. Докажите, что орбиты этого действия гомеоморфны G, или приведите контрпример.

Определение 8.3. Пусть – топологическое пространство, снабженное свободным, непрерывным действием группы Ли G, а факторпространство M/G с топологией фактора хаусдорфово. В такой ситуации проекция $M \longrightarrow M/G$ называется **главным G-расслоением**. Если на M и на M/G заданы согласованные структуры гладкого многообразия, а действие $G\times M \longrightarrow M$ гладко, главное G-расслоение называется **гладким**.

Замечание 8.1. Все главные G-расслоения, которые мы рассматриваем в дальнейшем, гладкие, если не оговорено обратное. Действие группы Ли на многообразии также предполагается по умолчанию гладким.

Задача 8.4 (!). Пусть G – компактная группа Ли, которая свободно действует на гладком многообразии M. Докажите, что фактор M/G гладкий, а $M \longrightarrow M/G$ – главное G-расслоение.

Определение 8.4. Расслоение Хопфа $S^3 \longrightarrow S^2$ есть ограничение тавтологического отображения $\mathbb{C}^2\backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ на $S^3 \subset \mathbb{C}^2\backslash 0$.

Задача 8.5. Докажите, что расслоение Хопфа есть гладкое главное S^1-расслоение.

Задача 8.6. Пусть $\pi:\ S^{2n} \longrightarrow M$ – гладкое отображение на многообразие меньшей размерности. Может ли π быть главным G-расслоением?

Задача 8.7. Постройте главное $SU(2)$-расслоение $S^7 \longrightarrow S^4$.

Задача 8.8. Постройте главное S^1-расслоение $S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$.

Задача 8.9 (*). Пусть $\mathbb{R}$ свободно действует на компактном многообразии M. Докажите, что $M/\mathbb{R}$ нехаусдорфово.

Задача 8.10 (**). $\pi: M \longrightarrow S^2$ – гладкое отображение, M ориентировано, а прообраз каждой точки – окружность. Докажите, что π допускает структуру главного S^1-расслоения, или найдите контрпример.

Задача 8.11 (**). $\pi: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение ориентированных многообразий, а прообраз каждой точки – S^3. Докажите, что π допускает структуру главного $SU(2)$-расслоения, или найдите контрпример.

8.3. Главные расслоения и когомологии

Определение 8.5. Пусть G – группа Ли, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор гладких функций $U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_{ij}} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ 2. $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$.

Определение 8.6. Два 1-коцикла ϕ_{ij} и ψ'_{ij} называются **когранчными**, если задан набор гладких отображений $\psi_i: U_i \longrightarrow G$, причем $\phi'_{ij} = \psi_i^{-1}\phi_{ij}\psi_j$.

Задача 8.12. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Определение 8.7. Пусть G – группа Ли. Множество $H^1(M,G)$ **неабелевых когомологий с коэффициентами в** G есть множество 1-коциклов с коэффициентами в G с точностью до когранчности.

Определение 8.8. Два главных G-расслоения $E \longrightarrow M$ и $E' \longrightarrow M$ **эквивалентны**, если существует диффеоморфизм $E \longrightarrow E'$ совместимый с проекцией на M и с действием G.

Задача 8.13 (!). Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности главных G-расслоений над M и $H^1(M,G)$.

Задача 8.14 (*). Докажите, что $H^1(M,G)$ не более чем счетно, когда компактно, или приведите контрпример.

Определение 8.9. Точная последовательность множеств есть последовательность отображений таких, что образ i-го есть прообраз отмеченной точки в $(i+1)$-м.

Задача 8.15 (!). Пусть $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность групп. Постройте точную последовательность неабелевых когомологий

$$H^1(M,G_1) \longrightarrow H^1(M,G_2) \longrightarrow H^1(M,G_3).$$

Задача 8.16. Докажите, что когомологии пучка гладких функций $H^i(M, C^\infty M)$ зануляются для всех $i > 0$.

Задача 8.17. Пусть $G = \mathbb{R}$. Докажите, что каждое главное G-расслоение тривиально.

Указание. Докажите, что $H^1(M,\mathbb{R}) = H^1(M, C^\infty M)$, и примените предыдущую задачу.

Задача 8.18 (!). Пусть M – стягиваемое многообразие. Докажите, что $H^1(M,G) = 0$ для любой группы G.

8.4. Классифицирующие пространства

Определение 8.10. Пусть X, Y – топологические пространства с действием группы G. Определим $X \times_G Y$ как $X \times Y/G$ с топологией фактора, где g действует на $X \times Y$ "диагонально", то есть по формуле $g(x,y) = (gx, gy)$.

Задача 8.19. Пусть X – гладкое многообразие, снабженное действием группы Ли G, а $E \longrightarrow M$ – гладкое G-расслоение. Постройте структуру гладкого многообразия на $E \times_G X$. Докажите, что естественная проекция $E \times_G X \longrightarrow M$ есть локально тривиальное расслоение со слоем X.

Определение 8.11. Расслоение $E \times_G X \longrightarrow M$, полученное таким образом, называется **присоединенным** по отношению к главному расслоению $E \longrightarrow M$.

Задача 8.20. Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение. Докажите, что $E \times_G G$ изоморфно E как расслоенное пространство.

Задача 8.21 (*). Пусть $E \longrightarrow B$ – главное G-расслоение, причем E стягиваемо, а $E_1 \longrightarrow B_1$ – еще одно главное G-расслоение. Докажите, что $E \times_G E_1$ гомотопически эквивалентно B_1.

Задача 8.22 (*). Пусть $E \longrightarrow B$ и $E_1 \longrightarrow B_1$ – главные G-расслоения, причем E и E_1 стягиваемо. Докажите, что B гомотопически эквивалентно B_1.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 8.12. Пусть $E \longrightarrow B$ – главное G-расслоение, причем E стягиваемо. Тогда B называется **классифицирующим пространством** для G, и обозначается BG.

Задача 8.23 (*). Докажите, что бесконечномерная сфера, полученная объединением $S^1 \subset S^2 \subset ... \subset S^n \subset ...$, стягиваема.

Задача 8.24 (*). Докажите, что $\mathbb{C}P^\infty = BU(1)$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.25 (*). Предположим, что G – компактная группа Ли, а V – бесконечномерное представление G, полученное как сумма конечномерных, нетривиальных неприводимых ортогональных представлений. Докажите, что G свободно действует на соответствующей бесконечномерной сфере S^∞, а S^∞/G есть классифицирующее пространство для G.

Определение 8.13. Пусть B – векторное расслоение над M. **Расслоение реперов** есть множество всех базисов в слоях B, снабженное естественной топологией.

Задача 8.26. Определите топологию на расслоении реперов явно, и докажите, что это главное $GL(n,\mathbb{R})$-расслоение для вещественного расслоения B, и главное $GL(n,\mathbb{C})$-расслоение для комплексного B.

Определение 8.14. Пусть B – векторное расслоение над M, снабженное метрикой (то есть положительно определенной квадратичной формой). **Расслоение ортонормированных реперов** есть множество всех ортонормированных базисов в слоях B, снабженное естественной топологией.

Задача 8.27. Определите топологию на расслоении ортонормированных реперов явно, и докажите, что это главное $O(n)$-расслоение.

Определение 8.15. Многообразие Штифеля $\mathrm{St}(m, m+n)$ есть пространство последовательностей из m ортонормированных векторов в евклидовом пространстве V размерности $n+m$. **Грассманиан** $\mathrm{Gr}(m, m+n)$ есть пространство m-мерных плоскостей в V.

Задача 8.28. Введите топологию и гладкую структуру на многообразии Штифеля и на грассманиане таким образом, что естественная проекция $\mathrm{St}(m, n+m) \longrightarrow \mathrm{Gr}(m, m+n)$ станет главным $O(m)$-расслоением.

Задача 8.29. Докажите, что $\pi_i(\mathrm{St}(m, n+m)) = 0$ для всех i таких, что $0 < i < m$.

Задача 8.30 (**). Докажите, что $\bigcup_n \mathrm{St}(m, n+m)$ стягиваемо, а $\mathrm{Gr}(m,\infty) := \bigcup_n \mathrm{Gr}(m, n+m)$ является классифицирующим пространством для $O(m)$

8.5. Ассоциированные векторные расслоения

Задача 8.31. Пусть V – представление группы G, а E – главное G-расслоение над M. Докажите, что аддитивная структура на V определяет структуру векторного расслоения над M на произведении $E \times_G V$.

Определение 8.16. Векторное расслоение $E \times_G V$ называется **ассоциированным векторным расслоением**, связанным с E и представлением V.

Задача 8.32. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ – тавтологическое представление группы $G = GL(n,\mathbb{R})$, B – вещественное векторное расслоение над M, а $E \longrightarrow M$ – расслоение реперов. Докажите, что B изоморфно ассоциированному векторному расслоению $E \times_G V$.

Замечание 8.2. Можно определить векторное расслоение как "расслоение, ассоциированное с каким-то главным $G = GL(n, \mathbb{R})$-расслоением и тавтологическим представлением". В силу предыдущей задачи, это определение эквивалентно обычному.

Задача 8.33. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ – тавтологическое представление группы $G = O(n)$, B – евклидово векторное расслоение над M, а $E \longrightarrow M$ – расслоение ортонормированных реперов. Докажите, что B изоморфно ассоциированному векторному расслоению $E \times_G V$.

8.6. Редукция главных расслоений

Задача 8.34. Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G_1-расслоение, а $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп. Докажите, что $E \times_{G_1} G$ есть главное G-расслоение.

Определение 8.17. Пусть $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп, а $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение. **Редукция E к G_1** есть главное G_1-расслоение $E_1 \longrightarrow M$ вместе с изоморфизмом главных G-расслоений $E \cong E_1 \times_{G_1} G$.

Задача 8.35. Пусть $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп, а $\Psi: H^1(M, G_1) \longrightarrow H^1(M, G)$ – соответствующее отображение когомологий. Докажите, что расслоение E редуцируется к G_1 тогда и только тогда, когда соответствующий коцикл лежит в образе Ψ.

Определение 8.18. Пусть $B = E \times_G V$ – векторное расслоение, которое получено из главного G-расслоения и представления V группы G. Тогда G называется **структурной группой расслоения** B.

Задача 8.36. Пусть B – векторное расслоение над M со структурной группой G, $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп, а $E_1 \longrightarrow M$ – главное G_1-расслоение, которое получено редукцией E к G_1. Докажите, что B ассоциировано с E_1 и представлением G_1, которое получено из гомоморфизма $G_1 \longrightarrow G$.

Определение 8.19. В такой ситуации говорится, что произведена **редукция структурной группы B к G_1.**

Задача 8.37. Докажите, что задание метрики на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$ к $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Задача 8.38. Докажите, что задание комплексной структуры на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(2n, \mathbb{R})$ к $GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$.

Задача 8.39. Докажите, что задание эрмитовой структуры на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(2n, \mathbb{R})$ к $U(n) \subset GL(2n, \mathbb{R})$.

Задача 8.40. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ есть ненулевой вектор, а $G = \mathrm{St}(e)$ его стабилизатор в $GL(n, \mathbb{R})$. Докажите, что выбор нигде не зануляющегося векторного поля на n-мерном многообразии равносилен редукции структурной группы касательного расслоения к $G \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Определение 8.20. Структурная группа многообразия есть структурная группа его касательного расслоения.

Задача 8.41. Пусть M – n-мерное риманово многообразие. Докажите, что выбор p-мерного подрасслоения в TM равносильно редукции структурной группы к $O(p) \times O(n-p) \subset O(n)$.

Задача 8.42. Докажите, что $SO(4) = SU(2) \times SU(2)/(\pm 1)$, где ± 1 действует диагонально на $SU(2) \times SU(2)$.

Определение 8.21. Спин-структура на 4-мерном, ориентированном римановом многообразии есть редукция структурной группы $SO(4)$ к $SU(2) \times SU(2)$

Задача 8.43 (!). Докажите, что стягиваемое 4-мерное многообразие допускает спин-структуру.

Задача 8.44 (*). Постройте односвязное, компактное 4-мерное многообразие, допускающее спин-структуру.

Задача 8.45 (**). Постройте односвязное, компактное 4-мерное многообразие, не допускающее спин-структуру.