Векторные расслоения 9: теорема Фробениуса

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

9.1. Распределения, слоения и субмерсии

Определение 9.1. **Распределение** на многообразии M есть подрасслоение в TM.

Задача 9.1. Пусть $\pi_1(M) = 0$ и у TM есть одномерное подрасслоение. Докажите, что на TM есть нигде не зануляющееся векторное поле.

Задача 9.2 (!). Найдите двумерное многообразие M такое, что у TM нет одномерного подрасслоения.

Задача 9.3 (**). Найдите трехмерное, компактное многообразие M такое, что у TM нет одномерного подрасслоения, или докажите, что его не бывает.

Задача 9.4 (**). Найдите некомпактное многообразие M такое, что у TM нет одномерного подрасслоения, или докажите, что его не бывает.

Задача 9.5. Найдите четырехмерное многообразие M, такое, что у TM нет нетривиальных трехмерных подрасслоений.

Определение 9.2. Гладкое отображение $\pi: \ M \longrightarrow N$ называется **субмерсией**, если дифференциал $D\pi$ сюрьективен в каждой точке M. Подрасслоение $\ker D\pi \subset TM$ называется **вертикальным касательным расслоением**, или **послойным касательным расслоением** для субмерсии, и обозначается $T_\pi M$.

Определение 9.3. Подрасслоение ("распределение") $B \subset TM$ называется **интегрируемым**, если у каждой точки $m \in M$ есть окрестность U и субмерсия $\pi: \ U \longrightarrow M_1$ такая, что $B\big|_U = T_\pi U$. Оно называется **инволютивным**, если для любых векторных полей $X, Y \in B$, имеет место $[X, Y] \in B$.

Задача 9.6 (!). Докажите, что каждое интегрируемое распределение инволютивно.

Замечание 9.1. Теорема Фробениуса утверждает, наоборот, что каждое инволютивное распределение интегрируемо.

Задача 9.7. Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение, $X, Y \in B$ векторные поля, а $\pi: \ TM \longrightarrow TM/B$ – естественная проекция. Докажите, что отображение $\Phi(X, Y) := \pi([X, Y])$ $C^\infty M$-линейно по X и Y.

Определение 9.4. Определенное выше отображение $\Phi: \ \Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ называется **формой Фробениуса** подрасслоения $B \subset TM$.

Определение 9.5. Пусть $\eta \in \Lambda^* M$ – дифференциальная форма, а $\ker \eta \subset TM$ – пучок векторных полей $X \in TM$ таких, что $\eta \lrcorner X := \eta(X, \cdot, \cdot, ..., \cdot)$ равна нулю. Этот подпучок называется **аннулятором**, или **ядром** формы η.

Задача 9.8. Пусть $\eta \in \Lambda^1 M$ – нигде не зануляющаяся 1-форма. Докажите, что $\ker \eta$ является подрасслоением в TM ранга $\dim M - 1$.

Задача 9.9. Пусть $\eta \in \Lambda^2 M$ – 2-форма, имеющая ранг k в каждой точке M. Докажите, что $\ker \eta$ является подрасслоением в TM ранга $n - 2k$.

9.2. Контактные многообразия

Задача 9.10. Пусть $\theta \in T^*M$ – нигде не зануляющаяся 1-форма, а $B = \ker\theta$.

а. Докажите, что B инволютивно, если $d\theta = 0$.

б. Пусть B инволютивно. Следует ли из этого, что $d\theta = 0$?

в. (*) Докажите, что инволютивность B влечет $\theta \wedge d\theta = 0$.

Указание. Воспользуйтесь формулой Картана.

Задача 9.11. Пусть $\theta \in T^*M$ – нигде не зануляющаяся 1-форма, а $B = \ker\theta$.

а. Докажите, что $\theta: \ TM \longrightarrow C^\infty M$ задает тривиализацию одномерного расслоения TM/B, то есть изоморфизм $TM/B \ \xrightarrow{\theta}\ C^\infty M$.

б. Пусть $\Phi: \ \Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ – форма Фробениуса. Докажите, что $\theta(\Phi(x,y)) = d\theta(x,y)$, где $\theta: TM/B \longrightarrow C^\infty M$ – изоморфизм, определенный выше.

Указание. Воспользуйтесь формулой Картана.

Определение 9.6. **Симплектическая форма** есть замкнутая, невырожденная 2-форма.

Определение 9.7. Пусть X – нечетномерное многообразие, $C(X) := X\times]0,\infty[$, а $\rho_\lambda: \ C(X) \longrightarrow C(X)$ переводит (x,t) в $(x,\lambda t)$. **Симплектический конус над** X есть $C(X)$, снабженный симплектической формой ω, удовлетворяющей $\rho_\lambda^*\omega = \lambda^2\omega$.

Задача 9.12. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}\backslash 0$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ – обычная симплектическая структура на $\mathbb{R}^{2n}$, а $\rho_\lambda(x) = \lambda x$. Докажите, что M есть симплектический конус над S^{2n-1}.

Задача 9.13. Пусть $(C(X) = X\times]0,\infty[, \omega)$ – симплектический конус, а $r := \frac{d}{dt}$ – векторное поле на $C(X)$, соответствующее дифференцированию по второй координате.

а. Докажите, что $\operatorname{Lie}_r \omega = 2\omega$.

б. Докажите, что 1-форма $\theta := \frac{1}{2}\omega \lrcorner r$ удовлетворяет $d\theta = \omega$.

Задача 9.14. Пусть X – $(2n-1)$-мерное гладкое многообразие, $t \in]0,\infty[$, а $X_t = X \times \{t\} \subset C(X)$ – соответствующее подмножество в симплектическом конусе $(C(X),\omega)$. Рассмотрим 1-форму $\theta := \omega \lrcorner r$.

а. Докажите, что $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ задает нигде не зануляющуюся форму объема на X_t.

б. (!) Пусть $B := \ker\theta\Big|_{X_t} \subset TX_t$ – ядро ограничения θ на X_t. Докажите, что форма Фробениуса $\Phi: \ \Lambda^2 B \longrightarrow TX/B$ невырождена.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 9.8. **Контактная структура** на нечетномерном ориентированном многообразии X есть подрасслоение $B \subset TX$ коразмерности 1, такое, что форма Фробениуса $\Phi: \ \Lambda^2 B \longrightarrow TX/B$ невырождена.

Задача 9.15. Пусть $(C(X),\omega)$ – симплектический конус. Постройте контактную структуру на X.

Задача 9.16. Пусть X – $(2n-1)$-мерное многообразие, θ нигде не зануляющаяся 1-форма, а $B \subset TX$ ее ядро.

а. (!) Предположим, что форма объема $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ невырождена. Докажите, что (X,B) контактно.

б. Предположим, что (X,B) контактно. Докажите, что форма $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ невырождена.

Задача 9.17. Пусть (X,B) – контактное многообразие, M – тотальное пространство расслоения $(TX/B)^*$, а $\pi: \ M \longrightarrow X$ – естественная проекция. Рассмотрим 1-форму θ на M, которая берет касательный вектор $v \in T_zM$, где $z = (x,a)$, $x \in X, a \in (TX/B)^*\big|_x \subset T^*_x X$, и применяет к нему $v \longrightarrow a(D\pi(v))$.

а. (*) Докажите, что форма $d\theta$ симплектична.

б. (*) Докажите, что M есть симплектический конус над X.

Замечание 9.2. Из этой задачи следует, что каждое контактное многообразие получается из симплектического конуса процедурой, которая описана в задаче 9.14.

Задача 9.18. Пусть M – многообразие, а S^*M – многообразие ориентированных во всех кокасательных пространствах T_x^*M (то есть двулистное накрытие проективизации $\mathbb{P}T^*M$). Постройте контактную структуру на S^*M для каждого гладкого многообразия M.

Задача 9.19 (*). Пусть (M,B) – контактное многообразие. Докажите, что любые две точки M можно соединить гладким путем $\gamma(t)$, касательным к B в любой своей точке, (то есть удовлетворяющим $\gamma'(t) \in B$).

Задача 9.20. Пусть M – шестимерное гладкое многообразие, а $B \subset TM$ – трехмерное подрасслоение. Рассмотрим форму Фробениуса $\Phi: \Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ (оба расслоения – размерности 3).

а. (*) Постройте пару (M,B), для которой $\Phi: \Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ – изоморфизм.

б. (**) Может ли такое M быть компактно?

9.3. Базовые формы и расслоения

Определение 9.9. Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Дифференциальная форма $\eta \in \Lambda^* M$ называется **базовой относительно** B (basic), если для любого векторного поля $X \in B$, имеем $\operatorname{Lie}_X \eta = 0$ и $\eta \lrcorner X = 0$.

Задача 9.21. Пусть $d\eta = 0$. Докажите, что η базовая относительно B тогда и только тогда, когда $B \subset \ker \eta$.

Задача 9.22. Докажите, что произведение базовых форм – базовая форма.

Задача 9.23. Докажите, что $d\eta$ базовая форма, если η базовая.

Указание. Воспользуйтесь формулой Картана.

Задача 9.24. Докажите, что для любого векторного поля X, функции f и дифференциальной формы η, имеем $\operatorname{Lie}_{fX} \eta = f \operatorname{Lie}_X \eta + df \wedge (\eta \lrcorner X)$.

Указание. Воспользуйтесь формулой Картана.

Задача 9.25 (!). Докажите, что η базовая форма на (M,B) тогда и только тогда, когда $\ker \eta \supset B$ и $\ker d\eta \supset B$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.26 (*). Пусть $B \subset TM$ – интегрируемое подрасслоение, а TM/B ориентируемо. Постройте ненулевую базовую k-форму, где $k = \operatorname{rk} TM/B$ (размерность расслоения TM/B), либо приведите пример, когда такой формы нет.

Задача 9.27 (*). Пусть (M,B) – контактное многообразие, а η – базовая (относительно B) форма. Докажите, что $\eta = 0$.

Определение 9.10. Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Обозначим за $(\Lambda_B^*(M), d)$ комплекс базовых дифференциальных форм. Его когомологии называются **базовыми когомологиями** (M,B).

Задача 9.28 (!). Пусть $\pi\ M \longrightarrow M_1$ гладкая субмерсия со связными слоями, а $B := T_\pi M$. Постройте биекцию между $\Lambda_B^*(M)$ и $\Lambda^* M_1$.

Замечание 9.3. Базовые формы есть способ говорить о дифференциальных формах на пространстве листов слоения, даже если это пространство не определено.

Задача 9.29 (*). Пусть $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – двумерный тор, а B – расслоение касательных векторов, пропорциональных $(1,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ (то есть касательное пространство к иррациональной обмотке тора). Найдите базовые когомологии (M,B).

Задача 9.30 (**). Пусть $B \subset TM$ – интегрируемое расслоение на компактном многообразии M, а $\omega \in \Lambda^2 M$ – замкнутая базовая 2-форма, такая, что соответствующее спаривание $TM/B \times TM/B$ невырождено (такая форма называется **трансверсально симплектической**). Докажите, что не существует базовой формы α такой, что $d\alpha = \omega$, или простройте контрпример.

Определение 9.11. Пусть $B \subset TM$ подрасслоение, а $B_0 \supset B$ – подрасслоение TM, содержащее B. Оно называется **базовым**, если для любых векторных полей $X \in B_0$, $Y \in B$, имеем $[X, Y] \in B_0$.

Задача 9.31. Пусть η – базовая форма на (M, B), а $\ker \eta$ – ее аннигилятор. Докажите, что $\ker \eta$ – базовое расслоение.

Задача 9.32. Пусть $\eta \in \Lambda^* M$ – форма, базовая относительно подрасслоения $B \subset TM$. Докажите, что $\eta \lrcorner [X, Y] = 0$ для любых $X, Y \in B$.

Задача 9.33 (*). Пусть B – подрасслоение TM. Докажите, что B инволютивно тогда и только тогда, когда $B = \bigcap_\eta \ker \eta$, где пересечение берется по всем базовым относительно B 1-формам.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.34. Пусть $B \subset TM$, а форма Фробениуса $\Lambda^2 B \longrightarrow TM/B$ сюрьективна. Найдите все базовые подрасслоения $B_0 \subset TM$.

Задача 9.35. Пусть $\pi\ M \longrightarrow M_1$ гладкая субмерсия, $B_1 \subset TM_1$ подрасслоение, а

$$B_0 = \pi^{-1}(B_1) := \{x \in TM \ \mid \ D\pi(x) \subset B_1\}.$$

а. Докажите, что $B_0 \subset TM$ – базовое подрасслоение.

б. Докажите, что все базовые подрасслоения получаются таким образом.

9.4. Теорема Фробениуса

Замечание 9.4. Теорема Фробениуса утверждает, что каждое интегрируемое подрасслоение $B \subset TM$ инволютивно (это просто), и каждое инволютивное подрасслоение интегрируемо (это более трудно).

Задача 9.36. Пусть $B \subset TM$ подрасслоение ранга 1. Докажите, что оно интегрируемо.

Задача 9.37. Пусть $B \subset TM$ – инволютивное подрасслоение. Докажите, что для каждого подрасслоения $B_1 \subset B$ ранга 1, B является базовым на (M, B_1).

Задача 9.38. Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Предположим, что для каждого открытого подмножества $U \subset M$, и для каждого подрасслоения $B_1 \subset B\big|_U$ ранга 1, B является базовым на (M, B_1). Докажите, что B инволютивно.

Указание. Переход к подмножеству $U \subset M$ нужен для того, чтобы у B было много одномерных подрасслоений (*a priori*, их может не быть вовсе).

Задача 9.39. Пусть $M \longrightarrow M_1$ – гладкая субмерсия, $T_\pi M$ – послойное касательное расслоение, а $B \supset T_\pi M$ базовое на $(M, T_\pi M)$. Предположим, что $B = \pi^{-1}(B_1)$ (задача 9.35), где B_1 интегрируемо. Докажите, что B интегрируемо.

Задача 9.40 (!). (теорема Фробениуса)
Пусть $B \subset TM$ – инволютивное расслоение. Докажите, что оно интегрируемо.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.35, задачей 9.37 и задачей 9.39; примените индукцию по $\dim M$.