

Векторные расслоения 10: связность в главном расслоении

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

10.1. Связность Эресманна

Определение 10.1. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – гладкая субмерсия, а $T_\pi M \subset TM$ – послонное ("вертикальное") касательное расслоение. **Связность Эресманна** есть подрасслоение $B \subset TM$ такое, что $T_\pi M \oplus B = TM$. В такой ситуации, B называется **горизонтальное касательное расслоение** для субмерсии, и обозначается $T_{\text{hor}}M$ или $T_\nabla M$, где ∇ обозначает связность Эресманна.

Задача 10.1. Докажите, что $T_{\text{hor}}M$ изоморфно обратному образу π^*TN .

Определение 10.2. Пусть $X \in TN$ – векторное поле. Соответствующее векторное поле $\pi^*X \in \pi^*TM = T_{\text{hor}}M$ называется **горизонтальным подъемом X в $T_{\text{hor}}M$** .

Замечание 10.1. Вот пояснение, написанное с целью разъяснить геометрический смысл задачи 10.2. Параллельный перенос вдоль связности $T_{\text{hor}}M \subset TM$ есть диффеоморфизм Γ_t слоев π , параметризованных отрезком $t \in [0, 1]$, такой, что траектория точки $\Gamma_t(z)$ касается $T_{\text{hor}}M$ для всех $t \in [0, 1]$.

Определение 10.3. Непрерывное отображение называется **собственным**, если прообраз компакта всегда компактен.

Задача 10.2 (!). Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия а $T_{\text{hor}}M \subset TM$ – связность Эресманна. Рассмотрим гладкий путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ с началом в $x \in N$. Докажите, что существует и единственно отображение $\Gamma_t : \pi^{-1}(x) \times [0, 1] \rightarrow M$ такой, что $\pi(\Gamma_t(\pi^{-1}(x))) = \gamma(t)$, а $\frac{d\Gamma_t}{dt} \in T_{\text{hor}}M$

Указание. Возьмите векторное поле $\pi^{-1}(\dot{\gamma})$, полученное подъемом векторов $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ в $T_{\text{hor}}M$ (Определение 10.2), и проинтегрируйте его.

Задача 10.3. Докажите, что операция Γ_t задает диффеоморфизм слоев $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\gamma(0))$ и $\pi^{-1}(\gamma(t))$ для любого $t \in [0, 1]$.

Определение 10.4. Этот диффеоморфизм называется **параллельным переносом вдоль пути γ , ассоциированным со связностью Эресманна**.

Замечание 10.2. Параллельный перенос можно определить и для несобственных отображений, если векторное поле, полученное из горизонтального поднятия $\dot{\gamma}$, интегрируется.

Задача 10.4. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия со связной базой, допускающая связность Эресманна. Докажите, что все слои π диффеоморфны.

Указание. Постройте связность Эресманна на π и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.5. Кривизна связности Эресманна для субмерсии $\pi : M \rightarrow N$ есть форма Фробениуса подрасслоения $T_{\text{hor}}M \subset TM$,

$$\Phi : \Lambda^2 T_{\text{hor}}M \rightarrow T_{\pi}M.$$

Связность Эресманна называется **плоской**, если $\Phi = 0$.

Определение 10.6. Тривиализация субмерсии $\pi : M \rightarrow N$ есть изоморфизм $M \cong N \times F$, такой, что π действует на $M \cong N \times F$ как стандартная проекция. **Тривиальная связность** есть подрасслоение $TF \subset T(F \times N) = TF \oplus TN$.

Задача 10.5. Докажите, что кривизна тривиальной связности равна нулю.

Задача 10.6. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – собственная субмерсия, $N = \mathbb{R}$, а ∇ – связность Эресманна на π . Докажите, что π допускает тривиализацию, такую, что ∇ – тривиальная связность, ассоциированная с этой тривиализацией.

Задача 10.7 (!). Пусть $\pi : M \rightarrow N$ собственная субмерсия, $\pi_1(N) = 0$, а ∇ – плоская связность Эресманна. Докажите, что π допускает тривиализацию, такую, что ∇ – тривиальная связность, ассоциированная с этой тривиализацией.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Фробениуса.

Определение 10.7. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – гладкая субмерсия, а ∇ – связность Эресманна. **Группа голономий** Hol_x связности Эресманна в точке $x \in N$ есть подгруппа группы G диффеоморфизмов $\pi^{-1}(x)$, порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех петель с началом и концом в x . **Локальная группа голономий** есть подгруппа G , порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех стягиваемых петель с началом и концом в x .

Задача 10.8. Пусть $x, y \in N$ – точки связного многообразия N , а $M \rightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия, снабженная связностью Эресманна. Докажите, что группы голономий Hol_x и Hol_y изоморфны.

Задача 10.9 (!). Докажите, что локальная голономия связности тривиальна тогда и только тогда, когда связность плоская.

Определение 10.8. Свободная полугруппа от образующих x, y есть полугруппа, порожденная x, y , такая, что любые разные слова от x, y представляют разные элементы.

Задача 10.10. (лемма о пинг-понге для полугруппы) Пусть $\phi, \psi : X \rightarrow X$ две биекции на множестве X , переводящие $A \subset X$ в подмножество A , причем $\phi(A)$ не пересекается с $\psi(A)$. Докажите, что ϕ и ψ порождают свободную полугруппу в группе перестановок элементов X .

Задача 10.11. а. (*) (лемма о пинг-понге для группы)

Пусть A_+, A_-, B_+, B_- – непересекающиеся подмножества X , а $\phi, \psi : X \rightarrow X$ – биекции, которые действуют так:

$$\phi(X \setminus A_-) \subset A_+; \quad \phi^{-1}(X \setminus A_+) \subset A_-; \quad \psi(X \setminus B_-) \subset B_+; \quad \psi^{-1}(X \setminus B_+) \subset B_-.$$

Докажите, что ϕ, ψ порождают свободную группу от двух образующих.

б. (*) Приведите пример собственной субмерсии $M \rightarrow N$ со связностью Эресманна, голономия которой – свободная группа от двух образующих.

Определение 10.9. Гладкая субмерсия $\pi : M \rightarrow N$ римановых многообразий называется **римановой субмерсией**, если для каждого вектора $v \in T_x M$, ортогонального $T_\pi M$, имеем $|v| = |D\pi(v)|$.

Задача 10.12 ().** Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – риманова субмерсия полных римановых многообразий, а $T_{\text{hor}} M$ получено как ортогональное дополнение до вертикального касательного, $T_{\text{hor}} M = T_\pi M^\perp$. Докажите, что параллельный перенос определен для любого пути, или найдите контрпример.

Определение 10.10. **Группа классов отображений**, или же **группа Тейхмюллера** многообразия M есть группа связных компонент группы диффеоморфизмов (в C^1 -топологии).

Задача 10.13 (*). Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – собственная субмерсия. Докажите, что действие группы голономий связности Эресманна задает гомоморфизм из $\pi_1(N)$ в группу Тейхмюллера слоев π . Докажите, что этот гомоморфизм не зависит от выбора связности Эресманна.

Задача 10.14 (*). Найдите расслоение $X \rightarrow D$ с компактными, односвязными слоями над двумерным диском и связность Эресманна на X такую, что группа голономий связности действует на слое без неподвижных точек.

10.2. Связность Эресманна и 1-джеты

Определение 10.11. Пусть $\pi : X \rightarrow Y$ – гладкая субмерсия, а $s_1, s_2 : Y \rightarrow X$ – сечения π , которые проходят через точку $x \in X$. Говорится, что s_1 и s_2 **имеют одинаковый 1-джет** в x , если $T_x S_1 = T_x S_2$, где $S_1 = \text{im } s_1$ и $S_2 = \text{im } s_2$. Пространство классов эквивалентности обозначается $J_x^1(X, \pi)$, а объединение $J_x^1(X)$ по всем $x \in X$ называется **пространством 1-джетов сечений** π , и обозначается $J^1(X, \pi)$. Мы рассматриваем на $J^1(X, \pi)$ топологию, индуцированную C^1 -топологией на пространстве сечений.

Определение 10.12. Пусть B – векторное расслоение над X . **Аффинное расслоение с линеаризацией** B есть гладкое расслоение $E \rightarrow X$, снабженное действием $B \times_X E \rightarrow E$, перестановочным с проекцией на X , и индуцирующее изоморфизм между слоями B и слоями E .

Задача 10.15. Рассмотрим естественную проекцию $\pi_1 : J^1(X, \pi) \rightarrow X$ из пространства 1-джетов сечений. Докажите, что π_1 есть аффинное расслоение с линеаризацией $\text{Hom}(\pi^* T Y, T_\pi X)$.

Задача 10.16. Постройте точную последовательность расслоений на $J^1(X, \pi)$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1^* \pi^* T Y, \pi_1^* B) \rightarrow T J^1(X, \pi) \rightarrow \pi_1^* \pi^* T Y \rightarrow 0.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.17. Пусть $T_{\text{hor}}X \subset TX$ – связность Эресманна на гладкой субмерсии $\pi : X \rightarrow Y$.

- а. Докажите, что для каждой точки $x \in X$, в какой-то окрестности $U \ni \pi(x)$ существует сечение $s : U \rightarrow X$, содержащее x , и касательное к $T_{\text{hor}}X$.
- б. Докажите, что 1-джет такого сечения в x задается этим условием однозначно.

Задача 10.18 (!). Постройте биекцию между множеством связностей Эресманна и множеством сечений проекции $\pi_1 : J^1(X, \pi) \rightarrow X$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.13. Сечение расслоения 1-джетов, построенное в предыдущей задаче, называется **задающим связность**, связность, построенную по сечению расслоения 1-джетов – **заданной сечением расслоения 1-джетов**.

Задача 10.19. Пусть $B \rightarrow M$ – векторное расслоение со связностью ∇ .

- а. (!) Докажите, что для каждой точки $b \in \text{Tot } B$ в какой-то окрестности $U \ni \pi(b)$ существует сечение $s : U \rightarrow \text{Tot } B$, содержащее b , и удовлетворяющее $\nabla s \Big|_{\pi(b)} = 0$.
- б. (!) Докажите, что 1-джет такого сечения в b задается этим условием однозначно.

Определение 10.14. Такая связность Эресманна на $\text{Tot } B$ называется **линейной**, или **индуцированной линейной связностью** ∇ .

Задача 10.20. Пусть $\pi_1 : X_1 \rightarrow M, \pi_2 : X_2 \rightarrow M, \pi_3 : X_3 \rightarrow M$ – гладкие расслоения, а $\Phi : X_1 \times_M X_2 \rightarrow X_3$ – морфизм гладких расслоений, то есть гладкое отображение, перестановочное с проекцией в M . Докажите, что Φ индуцирует морфизм джет-расслоений $J^1(\Phi) : J^1(X_1, \pi_1) \times J^1(X_2, \pi_2) \rightarrow J^1(X_3, \pi_3)$.

Определение 10.15. В условиях предыдущей задачи, пусть на π_i заданы связности ∇^i , определяющие сечения s_i проекций $J^1(X_i, \pi_i) \rightarrow X_i$. Мы говорим, что отображение Φ **совместимо со связностями**, если $J^1(\Phi)(s_1 \times s_2) = s_3$.

Задача 10.21. Пусть $\Phi : X_1 \times_M X_2 \rightarrow X_3$ – морфизм гладких расслоений, совместимый со связностями ∇^i на $\pi_i : X_i \rightarrow M$. Докажите, что Φ переводит любую пару сечений, касательных к $T_{\text{hor}}X_i, i = 1, 2$, в сечение π_3 , касательное к $T_{\text{hor}}X_3$.

Задача 10.22. Пусть B – векторное расслоение над M , $\text{Tot } B$ – его тотальное пространство, $\text{Tot } C^\infty M = \mathbb{R} \times M$ – тотальное пространство тривиального расслоения, снабженное тривиальной связностью, а $\text{Tot } B \times \text{Tot } B \xrightarrow{\mu} \text{Tot } B$ и $\text{Tot } C^\infty M \times \text{Tot } B \xrightarrow{v} \text{Tot } B$ – морфизмы гладких расслоений, заданные аддитивной структурой на B и умножением на функции. Рассмотрим связность Эресманна ∇ на $\text{Tot } B \rightarrow M$.

- а. Пусть ∇ линейная связность. Докажите, что отображения μ и v совместимы со связностью.
- б. (!) Пусть отображения μ и v совместимы со связностью. Докажите, что ∇ линейна.

10.3. Связность на главном G -расслоении

Определение 10.16. Пусть G – группа Ли, $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, а $T_{\text{hor}}E \subset TE$ – связность Эресманна. Она называется **G -инвариантной**, если для любого $g \in G$ и $X \in T_{\text{hor}}E$, поле $g(X)$ лежит в $T_{\text{hor}}E$. **Связность на главном G -расслоении** есть G -инвариантная связность Эресманна.

Задача 10.23 ().** Докажите, что операция параллельного переноса на главном G -расслоении всегда корректно определена, даже если G не компактно.

Задача 10.24. Пусть X – топологическое пространство, на котором группа G действует непрерывно, свободно и транзитивно (такое пространство называется **торсором над G**). Рассмотрим группу H гомеоморфизмов X , коммутирующих с действием G . Постройте естественный изоморфизм $G \rightarrow H$.

Задача 10.25 (!). Докажите, что группа голономии G -инвариантной связности на главном G -расслоении есть подгруппа G .

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.26. Пусть \mathcal{A} – пространство связностей Эресманна на $M \xrightarrow{\pi} N$. Докажите, что \mathcal{A} является аффинным пространством с линейризацией $\text{Hom}(\pi^*TN, T_{\pi}M)$.

Задача 10.27. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – гладкая субмерсия, α_i – функции на N такие, что $\sum \alpha_i = 1$, а ∇_i – связности Эресманна. Определите $\sum_i \alpha_i \nabla_i$ и докажите, что это тоже связность Эресманна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.28. Пусть $\pi : M \rightarrow N$ – главное G -расслоение. Докажите, что π всегда допускает G -инвариантную связность Эресманна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.29. Пусть $E \rightarrow N$ – главное G -расслоение, а X – гладкое многообразие с действием G . Обозначим за \mathcal{X} многообразие $\mathcal{X} := E \times_G X$.

- Докажите, что $\mathcal{X} \rightarrow N$ есть локально-тривиальное гладкое расслоение со слоями, диффеоморфными X .
- Пусть $TE = T_{\pi}E \oplus T_{\text{hor}}E$ – G -инвариантная связность Эресманна, а $v : X \times E \rightarrow E \times_G X$ – стандартная проекция. Докажите, что $T_{\text{hor}}\mathcal{X} := Dv(T_{\text{hor}}E)$ задает связность Эресманна на $\mathcal{X} \rightarrow N$.

Определение 10.17. В условиях предыдущей задачи, $Dv(T_{\text{hor}}E)$ называется **связностью Эресманна на присоединенном расслоении, индуцированной связностью $T_{\text{hor}}E$ на главном G -расслоении**.

Задача 10.30 (!). Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G -расслоение, ∇ – связность на π , V – представление G , а $B \rightarrow N$ – присоединенное векторное расслоение, $B = M \times_G V$. Рассмотрим связность Эресманна ∇^B на $\text{Tot } B$, индуцированную с ∇ . Докажите, что это линейная связность.

Задача 10.31 (!). Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное $GL(n)$ -расслоение, а V – фундаментальное n -мерное представление G . Докажите, что каждая линейная связность на $\text{Tot}(M \times_G V)$ индуцирована связностью на главном расслоении π .

Задача 10.32. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное $O(n)$ -расслоение, а V – фундаментальное n -мерное представление G . Докажите, что каждая ортогональная связность на $\text{Tot}(M \times_G V)$ индуцирована связностью на главном расслоении π .

Определение 10.18. Пусть $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, V – представление G , а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Напомним, что в такой ситуации G называется **структурной группой** B . Говорится, что линейная связность ∇ на B **согласована со структурной группой** G , если ∇ индуцирована связностью на главном расслоении E . В такой ситуации ∇ называется G -связностью.

10.4. Связности и кривизна

Задача 10.33. Пусть X – торсор над группой Ли G . Докажите, что пространство G -инвариантных векторных полей на X канонически отождествляется с алгеброй Ли G .

Задача 10.34. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G -расслоение, а \mathcal{A} – пространство связностей на π .

- Докажите, что \mathcal{A} есть аффинное векторное пространство, линеаризация которого W отождествляется с пространством G -инвариантных сечений $\pi^* \Lambda^1 N \otimes T_\pi M$.
- (!) Докажите, что W канонически изоморфно $\Lambda^1 N \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, где \mathfrak{g} есть алгебра Ли G .

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.35. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G -расслоение, ∇ – связность на нем, а $\Theta \in \pi^* \Lambda^2 N \otimes T_{\text{hor}} M$ – ее кривизна.

- Докажите, что Θ лежит в пространстве R G -инвариантных сечений $\pi^* \Lambda^2 N \otimes T_{\text{hor}} M$.
- Отождествите R и $\Lambda^2 N \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, где \mathfrak{g} есть алгебра Ли G .

Задача 10.36 (!). Пусть $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, V – представление G , а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим G -связность ∇ на B , и пусть $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } B$ – отображение, касательное естественному действию G на B . Докажите, что кривизна ∇ лежит в $\Lambda^2 M \otimes (\text{im } \rho)$.

Задача 10.37 (*). Пусть $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, V – представление G , а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим какую-то форму $\Theta \in \Lambda^2 M \otimes (\text{im } \rho)$. Докажите, что Θ можно реализовать как кривизну G -связности, или найдите контрпример.

Задача 10.38 (!). Пусть $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, V – представление G , а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим группу G_x автоморфизмов слоя $B|_x$, полученную из G -автоморфизмов слоев E . Докажите, что эта группа изоморфна (неканонически) образу G в $\text{End } V$. Докажите, что голономия любой G -связности лежит в G_x .

Задача 10.39 ().** Пусть $E \rightarrow M$ – главное G -расслоение, V – представление G , а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Предположим, что $\dim M \geq 2$. Постройте G -связность, голономия которой равна образу G .