Векторные расслоения 10: связность в главном расслоении

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

10.1. Связность Эресманна

Определение 10.1. Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – гладкая субмерсия, а $T_\pi M \subset TM$ – послойное ("вертикальное") касательное расслоение. **Связность Эресманна** есть подрасслоение $B \subset TM$ такое, что $T_\pi M \oplus B = TM$. В такой ситуации, B называется **горизонтальное касательное расслоение** для субмерсии, и обозначается $T_{\sf hor}M$ или $T_\nabla M$, где ∇ обозначает связность Эресманна.

Задача 10.1. Докажите, что $T_{\sf hor}M$ изоморфно обратному образу π^*TN.

Определение 10.2. Пусть $X \in TN$ – векторное поле. Соответствующее векторное поле $\pi^*X \in \pi^*TM = T_{\sf hor}M$ называется **горизонтальным подъемом X в $T_{\sf hor}M$.**

Замечание 10.1. Вот пояснение, написанное с целью разъяснить геометрический смысл задачи 10.2. Параллельный перенос вдоль связности $T_{\sf hor}M \subset TM$ есть диффеоморфизм Γ_t слоев π, параметризованных отрезком $t \in [0,1]$, такой, что траектория точки $\Gamma_t(z)$ касается $T_{\sf hor}M$ для всех $t \in [0,1]$.

Определение 10.3. Непрерывное отображение называется **собственным**, если прообраз компакта всегда компакт.

Задача 10.2 (!). Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия а $T_{\sf hor}M \subset TM$ – связность Эресманна. Рассмотрим гладкий путь $\gamma: [0,1] \longrightarrow N$ с началом в $x \in N$. Докажите, что существует и единственно отображение $\Gamma_t: \pi^{-1}(x) \times [0,1] \longrightarrow M$ такой, что $\pi(\Gamma_t(\pi^{-1}(x)) = \gamma(t)$, а $\frac{d\Gamma_t}{dt} \in T_{\sf hor}M$

Указание. Возьмите векторное поле $\pi^{-1}(\dot\gamma)$, полученное подъемом векторов $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ в $T_{\sf hor}M$ (Определение 10.2), и проинтегрируйте его.

Задача 10.3. Докажите, что операция Γ_t задает диффеоморфизм слоев $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\gamma(0))$ и $\pi^{-1}(\gamma(t))$ для любого $t \in [0,1]$.

Определение 10.4. Этот диффеоморфизм называется **параллельным переносом вдоль пути γ, ассоциированным со связностью Эресманна.**

Замечание 10.2. Параллельный перенос можно определить и для несобственных отображений, если векторное поле, полученное из горизонтального поднятия $\dot\gamma$, интегрируется.

Задача 10.4. Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия со связной базой, допускающая связность Эресманна. Докажите, что все слои π диффеоморфны.

Указание. Постройте связность Эресманна на π и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.5. Кривизна связности Эресманна для субмерсии $\pi : M \longrightarrow N$ есть форма Фробениуса подрасслоения $T_{\mathsf{hor}}M \subset TM$,

$$\Phi : \Lambda^2 T_{\mathsf{hor}}M \longrightarrow T_\pi M.$$

Связность Эресманна называется **плоской**, если $\Phi = 0$.

Определение 10.6. Тривиализация субмерсии $\pi : M \longrightarrow N$ есть изоморфизм $M \cong N \times F$, такой, что π действует на $M \cong N \times F$ как стандартная проекция. **Тривиальная связность** есть подрасслоение $TF \subset T(F \times N) = TF \oplus TN$.

Задача 10.5. Докажите, что кривизна тривиальной связности равна нулю.

Задача 10.6. Пусть $\pi : M \longrightarrow N$ – собственная субмерсия, $N = \mathbb{R}$, а ∇ – связность Эресманна на π. Докажите, что π допускает тривиализацию, такую, что ∇ – тривиальная связность, ассоциированная с этой тривиализацией.

Задача 10.7 (!). Пусть $\pi : M \longrightarrow N$ собственная субмерсия, $\pi_1(N) = 0$, а ∇ – плоская связность Эресманна. Докажите, что π допускает тривиализацию, такую, что ∇ – тривиальная связность, ассоциированная с этой тривиализацией.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Фробениуса.

Определение 10.7. Пусть $\pi : M \longrightarrow N$ - гладкая субмерсия, а ∇ – связность Эресманна. **Группа голономий** Hol_x связности Эресманна в точке $x \in N$ есть подгруппа группы G диффеоморфизмов $\pi^{-1}(x)$, порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех петель с началом и концом в x. **Локальная группа голономий** есть подгруппа G, порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех стягиваемых петель с началом и концом в x.

Задача 10.8. Пусть $x, y \in N$ – точки связного многообразия N, а $M \longrightarrow N$ – гладкая собственная субмерсия, снабженная связностью Эресманна. Докажите, что группы голономий Hol_x и Hol_y изоморфны.

Задача 10.9 (!). Докажите, что локальная голономия связности тривиальна тогда и только тогда, когда связность плоская.

Определение 10.8. Свободная полугруппа от образующих x, y есть полугруппа, порожденная x, y, такая, что любые разные слова от x, y представляют разные элементы.

Задача 10.10. (лемма о пинг-понге для полугруппы) Пусть $\phi, \psi : X \longrightarrow X$ две биекции на множестве X, переводящие $A \subset X$ в подмножество A, причем $\phi(A)$ не пересекается с $\psi(A)$. Докажите, что ϕ и ψ порождают свободную полугруппу в группе перестановок элементов X.

Задача 10.11. a. (*) (лемма о пинг-понге для группы)

Пусть A_+, A_-, B_+, B_- – непересекающиеся подмножества X, а $\phi, \psi : X \longrightarrow X$ – биекции, которые действуют так:

$$\phi(X \backslash A_-) \subset A_+; \quad \phi^{-1}(X \backslash A_+) \subset A_-; \quad \psi(X \backslash B_-) \subset B_+; \quad \psi^{-1}(X \backslash B_+) \subset B_-.$$

Докажите, что ϕ, ψ порождают свободную группу от двух образующих.

б. (*) Приведите пример собственной субмерсии $M \longrightarrow N$ со связностью Эресманна, голономия которой – свободная группа от двух образующих.

Определение 10.9. Гладкая субмерсия $\pi: M \longrightarrow N$ римановых многообразий называется **римановой субмерсией**, если для каждого вектора $v \in T_x M$, ортогонального $T_\pi M$, имеем $|v| = |D\pi(v)|$.

Задача 10.12 (**). Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – риманова субмерсия полных римановых многообразий, а $T_{\mathsf{hor}} M$ получено как ортогональное дополнение до вертикального касательного, $T_{\mathsf{hor}} M = T_\pi M^\perp$. Докажите, что параллельный перенос определен для любого пути, или найдите контрпример.

Определение 10.10. Группа классов отображений, или же **группа Тейхмюллера** многообразия M есть группа связных компонент группы диффеоморфизмов (в C^1-топологии).

Задача 10.13 (*). Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – собственная субмерсия. Докажите, что действие группы голономий связности Эресманна задает гомоморфизм из $\pi_1(N)$ в группу Тейхмюллера слоев π. Докажите, что этот гомоморфизм не зависит от выбора связности Эресманна.

Задача 10.14 (*). Найдите расслоение $X \longrightarrow D$ с компактными, односвязными слоями над двумерным диском и связность Эресманна на X такую, что группа голономий связности действует на слое без неподвижных точек.

10.2. Связность Эресманна и 1-джеты

Определение 10.11. Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ – гладкая субмерсия, а $s_1, s_2: Y \longrightarrow X$ – сечения π, которые проходят через точку $x \in X$. Говорится, что s_1 и s_2 **имеют одинаковый 1-джет в** x, если $T_x S_1 = T_x S_2$, где $S_1 = \operatorname{im} s_1$ и $S_2 = \operatorname{im} s_2$. Пространство классов эквивалентности обозначается $J^1_x(X, \pi)$, а объединение $J^1_x(X)$ по всем $x \in X$ называется **пространство 1-джетов сечений** π, и обозначается $J^1(X, \pi)$. Мы рассматриваем на $J^1(X, \pi)$ топологию, индуцированную C^1-топологией на пространстве сечений.

Определение 10.12. Пусть B – векторное расслоение над X. **Аффинное расслоение с линеаризацией** B есть гладкое расслоение $E \longrightarrow X$, снабженное действием $B \times_X E \longrightarrow E$, перестановочным с проекцией на X, и индуцирующее изоморфизм между слоями B и слоями E.

Задача 10.15. Рассмотрим естественную проекцию $\pi_1: J^1(X, \pi) \longrightarrow X$ из пространства 1-джетов сечений. Докажите, что π_1 есть аффинное расслоение с линеаризацией $\operatorname{Hom}(\pi^* TY, T_\pi X)$.

Задача 10.16. Постройте точную последовательность расслоений на $J^1(X, \pi)$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_1^* \pi^* TY, \pi_1^* B) \longrightarrow TJ^1(X, \pi) \longrightarrow TX \longrightarrow 0.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.17. Пусть $T_{\mathsf{hor}} X \subset TX$ – связность Эресманна на гладкой субмерсии $\pi: X \longrightarrow Y$.

а. Докажите, что для каждой точки $x \in X$, в какой-то окрестности $U \ni \pi(x)$ существует сечение $s: U \longrightarrow X$, содержащее x, и касательное к $T_{\mathsf{hor}} X$.

б. Докажите, что 1-джет такого сечения в x задается этим условием однозначно.

Задача 10.18 (!). Постройте биекцию между множеством связностей Эресманна и множеством сечений проекции $\pi_1 : J^1(X,\pi) \longrightarrow X$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 10.13. Сечение расслоения 1-джетов, построенное в предыдущей задаче, называется **задающим связность**, связность, построенную по сечению расслоения 1-джетов – **заданной сечением расслоения 1-джетов**.

Задача 10.19. Пусть $B \longrightarrow M$ – векторное расслоение со связностью ∇.

а. (!) Докажите, что для каждой точки $b \in \operatorname{Tot} B$ в какой-то окрестности $U \ni \pi(b)$ существует сечение $s : U \longrightarrow \operatorname{Tot} B$, содержащее b, и удовлетворяющее $\nabla s\Big|_{\pi(b)} = 0$.

б. (!) Докажите, что 1-джет такого сечения в b задается этим условием однозначно.

Определение 10.14. Такая связность Эресманна на $\operatorname{Tot} B$ называется **линейной**, или **индуцированной линейной связностью** ∇**.**

Задача 10.20. Пусть $\pi_1 : X_1 \longrightarrow M, \pi_2 : X_2 \longrightarrow M, \pi_3 : X_3 \longrightarrow M$ – гладкие расслоения, а $\Phi : X_1 \times_M X_2 \longrightarrow X_3$ – морфизм гладких расслоений, то есть гладкое отображение, перестановочное с проекцией в M. Докажите, что Φ индуцирует морфизм джет-расслоений $J^1(\Phi) : J^1(X_1,\pi_1) \times J^1(X_2,\pi_2) \longrightarrow J^1(X_3,\pi_3)$.

Определение 10.15. В условиях предыдущей задачи, пусть на π_i заданы связности ∇^i, определяющие сечения s_i проекций $J^1(X_i,\pi_i) \longrightarrow X_i$. Мы говорим, что отображение Φ **совместимо со связностями**, если $J^1(\Phi)(s_1 \times s_2) = s_3$.

Задача 10.21. Пусть $\Phi : X_1 \times_M X_2 \longrightarrow X_3$ – морфизм гладких расслоений, совместимый со связностями ∇^i на $\pi_i : X_i \longrightarrow M$. Докажите, что Φ переводит любую пару сечений, касательных к $T_{\mathsf{hor}} X_i$, $i = 1, 2$, в сечение π_3, касательное к $T_{\mathsf{hor}} X_3$.

Задача 10.22. Пусть B – векторное расслоение над M, $\operatorname{Tot} B$ – его тотальное пространство, $\operatorname{Tot} C^\infty M = \mathbb{R} \times M$ – тотальное пространство тривиального расслоения, снабженное тривиальной связностью, а $\operatorname{Tot} B \times \operatorname{Tot} B \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tot} B$ и $\operatorname{Tot} C^\infty M \times \operatorname{Tot} B \xrightarrow{v} \operatorname{Tot} B$ – морфизмы гладких расслоений, заданные аддитивной структурой на B и умножением на функции. Рассмотрим связность Эресманна ∇ на $\operatorname{Tot} B \longrightarrow M$.

а. Пусть ∇ линейная связность. Докажите, что отображения μ и v совместимы со связностью.

б. (!) Пусть отображения μ и v совместимы со связностью. Докажите, что ∇ линейна.

10.3. Связность на главном G-расслоении

Определение 10.16. Пусть G – группа Ли, $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, а $T_{\mathsf{hor}} E \subset TE$ – связность Эресманна. Она называется G**-инвариантной**, если для любого $g \in G$ и $X \in T_{\mathsf{hor}} E$, поле $g(X)$ лежит в $T_{\mathsf{hor}} E$. **Связность на главном** G**-расслоении** есть G-инвариантная связность Эресманна.

Задача 10.23 (**). Докажите, что операция параллельного переноса на главном G-расслоении всегда корректно определена, даже если G не компактно.

Задача 10.24. Пусть X – топологическое пространство, на котором группа G действует непрерывно, свободно и транзитивно (такое пространство называется **торсором над** G). Рассмотрим группу H гомеоморфизмов X, коммутирующих с действием G. Постройте естественный изоморфизм $G \longrightarrow H$.

Задача 10.25 (!). Докажите, что группа голономии G-инвариантной связности на главном G-расслоении есть подгруппа G.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.26. Пусть $\mathcal{A}$ – пространство связностей Эресманна на $M \xrightarrow{\pi} N$. Докажите, что $\mathcal{A}$ является аффинным пространством с линеаризацией $\operatorname{Hom}(\pi^* TN, T_\pi M)$.

Задача 10.27. Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – гладкая субмерсия, α_i – функции на N такие, что $\sum \alpha_i = 1$, а ∇_i – связности Эресманна. Определите $\sum_i \alpha_i \nabla_i$ и докажите, что это тоже связность Эресманна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.28. Пусть $\pi: M \longrightarrow N$ – главное G-расслоение. Докажите, что π всегда допускает G-инвариантную связность Эресманна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.29. Пусть $E \longrightarrow N$ – главное G-расслоение, а X – гладкое многообразие с действием G. Обозначим за $\mathcal{X}$ многообразие $\mathcal{X} := E \times_G X$.

а. Докажите, что $\mathcal{X} \longrightarrow N$ есть локально-тривиальное гладкое расслоение со слоями, диффеоморфными X.

б. Пусть $TE = T_\pi E \oplus T_{\mathsf{hor}} E$ – G-инвариантная связность Эресманна, а $v: X \times E \longrightarrow E \times_G X$ – стандартная проекция. Докажите, что $T_{\mathsf{hor}} \mathcal{X} := Dv(T_{\mathsf{hor}} E)$ задает связность Эресманна на $\mathcal{X} \longrightarrow N$

Определение 10.17. В условиях предыдущей задачи, $Dv(T_{\mathsf{hor}} E)$ называется **связностью Эресманна на присоединенном расслоении, индуцированной связностью $T_{\mathsf{hor}} E$ на главном G-расслоении.**

Задача 10.30 (!). Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G-расслоение, ∇ – связность на π, V – представление G, а $B \longrightarrow N$ – присоединенное векторное расслоение, $B = M \times_G V$. Рассмотрим связность Эресманна ∇^B на $\operatorname{Tot} B$, индуцированную с ∇. Докажите, что это линейная связность.

Задача 10.31 (!). Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное $GL(n)$-расслоение, а V – фундаментальное n-мерное представление G. Докажите, что каждая линейная связность на $\operatorname{Tot}(M \times_G V)$ индуцирована связностью на главном расслоении π.

Задача 10.32. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное $O(n)$-расслоение, а V – фундаментальное n-мерное представление G. Докажите, что каждая ортогональная связность на $\operatorname{Tot}(M \times_G V)$ индуцирована связностью на главном расслоении π.

Определение 10.18. Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Напомним, что в такой ситуации G называется **структурной группой** B. Говорится, что линейная связность ∇ на B **согласована со структурной группой** G, если ∇ индуцирована связностью на главном расслоении E. В такой ситуации ∇ называется G-связностью.

10.4. Связности и кривизна

Задача 10.33. Пусть X – торсор над группой Ли G. Докажите, что пространство G-инвариантных векторных полей на X канонически отождествляется с алгеброй Ли G.

Задача 10.34. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G-расслоение, а $\mathcal{A}$ – пространство связностей на π.

а. Докажите, что $\mathcal{A}$ есть аффинное векторное пространство, линеаризация которого W отождествляется с пространством G-инвариантных сечений $\pi^*\Lambda^1 N \otimes T_\pi M$.

б. (!) Докажите, что W канонически изоморфно $\Lambda^1 N \otimes_{C^\infty M} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть пучок алгебр Ли, состоящий из вертикальных векторных полей, коммутирующих с действием G.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.35. Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G-расслоение, ∇ – связность на нем, а $\Theta \in \pi^*\Lambda^2 N \otimes T_{\mathsf{hor}} M$ – ее кривизна.

а. Докажите, что Θ лежит в пространстве R G-инвариантных сечений $\pi^*\Lambda^2 N \otimes T_{\mathsf{hor}} M$.

б. Отождествите R и $\Lambda^2 N \otimes_{C^\infty M} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть пучок алгебр Ли, определенный как в задаче 10.34.

Задача 10.36 (!). Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим G-связность ∇ на B, и пусть $\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{End} B$ – морфизм пучков алгебр Ли, полученный из действия $\mathfrak{g}$ на E. Докажите, что кривизна ∇ лежит в $\Lambda^2 M \otimes (\operatorname{im} \rho)$.

Задача 10.37 (*). Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим какую-то форму $\Theta \in \Lambda^2 M \otimes (\operatorname{im} \rho)$. Докажите, что Θ можно реализовать как кривизну G-связности, или найдите контрпример.

Задача 10.38 (!). Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Рассмотрим группу G_x автоморфизмов слоя $B\big|_x$, полученную из G-автоморфизмов слоев E. Докажите, что эта группа изоморфна (неканонически) образу G в $\operatorname{End} V$. Докажите, что голономия любой G-связности лежит в G_x.

Задача 10.39 (**). Пусть $E \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Предположим, что $\dim M \geqslant 2$. Постройте G-связность, голономия которой равна образу G.