Векторные расслоения 11: линейные связности

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

11.1. Векторные поля, линейные по слоям $\operatorname{Tot} B$

Задача 11.1. Пусть B – векторное расслоение на M. Докажите, что сечения B задают функции на тотальном пространстве $\operatorname{Tot} B^*$, линейные вдоль слоев расслоения.

Определение 11.1. Обозначим за $C^\infty_k \operatorname{Tot} B$ функции на $\operatorname{Tot} B$, которые на каждом слое задаются однородными полиномами степени k.

Задача 11.2. Постройте изоморфизм между алгеброй $\bigoplus_k C^\infty_k \operatorname{Tot} B$ и алгеброй сечений $\bigoplus \mathsf{Sym}^k B^*$, где Sym^k обозначает k-ю симметрическую степень расслоения.

Определение 11.2. Пусть $\pi: \ M \longrightarrow N$ – гладкая субмерсия, $X \in TN$ – векторное поле. **Горизонтальный подъем** X в TM есть векторное поле $\tilde X \in TM$ такое, что для любой точки $m \in M$, $D\pi(\tilde X\big|_m) = X\Big|_{\pi(m)}$.

Задача 11.3 (!). Пусть $\pi: \ M \longrightarrow N$ – гладкая субмерсия, а $Z \in TM$ – векторное поле такое, что $\operatorname{Lie}_Z(\pi^* C^\infty N) \subset \pi^* C^\infty N$. Докажите, что Z есть подъем векторного поля на N.

Замечание 11.1. Напомню, что векторные поля на многообразии определялись как дифференцирования алгебры функций.

Определение 11.3. Пусть B – векторное расслоение на многообразии M. Векторное поле на $\operatorname{Tot} B$ называется **линейным по слоям**, если $\operatorname{Lie}_Z(C^\infty_1 \operatorname{Tot} B) \subset C^\infty_1 \operatorname{Tot} B$.

Задача 11.4. Пусть B – векторное расслоение на многообразии M, а $Z \in T \operatorname{Tot} B$ – линейное по слоям векторное поле.

а. Докажите, что для каждой функции $\beta \in C^\infty_1 \operatorname{Tot} B$ и $f_1 \in C^\infty M$, $f := \pi^* f$, имеет место $\operatorname{Lie}_Z(f\beta) = f \operatorname{Lie}_z \beta + D(f)\beta$, где $D(f)$ получено подъемом какой-то функции на M.

б. Докажите, что оператор $f \longrightarrow Df$ задает дифференцирование на $C^\infty M$.

в. Докажите, что Z есть горизонтальный подъем векторного поля $Z_0 \in TM$ такого, что $D(f) = \operatorname{Lie}_{Z_0} f$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 11.4. Векторное поле Z на $V = \mathbb{R}^n$ называется **линейным**, если Lie_Z переводит пространство $C^\infty_1 V$ однородных функций степени 1 в себя.

Задача 11.5. Докажите, что каждое линейное векторное поле $Z \in T\mathbb{R}^n$ имеет вид $Z = \sum_{j,k} \beta_{ij} b_j \frac{d}{db_k}$, где b_i – стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$, а $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ константы.

Задача 11.6 (!). Пусть Z – векторное поле на $\operatorname{Tot} B$, линейное по слоям. Докажите, что на локально на M есть координаты $x_1, ..., x_n$ и тривиализация B, задающая координаты $b_1, ..., b_m$ на $\operatorname{Tot} B$, линейные по слоям, такие, что $Z = \sum \alpha_i \frac{d}{dx_i} + \sum_{j,k} \beta_{ij} b_j \frac{d}{db_k}$, а α_i, β_{ij} – функции на M.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 11.5. Пусть B – векторное расслоение на многообразии M. Связность Эресманна на $\operatorname{Tot} B$ называется **линейной**, если на главном $GL(n)$-расслоении реперов на B есть связность, которая индуцирует связность на $\operatorname{Tot} B$ как на присоединенном расслоении.

Замечание 11.2. В прошлом листке доказывалось, что связность Эресманна на $\operatorname{Tot} B$ линейна тогда и только тогда, когда она согласована с операциями сложения сечений и умножения на функцию. В этом листке можно пользоваться этой эквивалентностью без доказательства.

Задача 11.7 (!). Постройте естественную биекцию между множеством линейных связностей Эресманна на $\operatorname{Tot} B$ и множеством линейных отображений $TM \xrightarrow{\sigma} T \operatorname{Tot} B$, переводящих каждое векторное поле $Z \in TM$ в его горизонтальный лифт и такое, что все $\sigma(Z)$ линейны по слоям.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.8. Пусть B – векторное расслоение на M, $Z \in TM$, а $\tilde{Z}$ – его поднятие в $T \operatorname{Tot} B$ до векторного поля, линейного по слоям.

а. Докажите, что действие $\operatorname{Lie}_{\tilde{Z}}$ на пространстве $C^\infty_1 \operatorname{Tot} B$, отождествляемым с пространством сечений B^*, удовлетворяет $\operatorname{Lie}_{\tilde{Z}}(f\beta) = f \operatorname{Lie}_{\tilde{Z}} \beta + \operatorname{Lie}_Z f \beta$ для любого $\beta \in B^*$ и $f \in C^\infty M$.

б. (!) Постройте естественную биекцию между отображениями $TM \xrightarrow{\sigma} T \operatorname{Tot} B$, удовлетворяющими условиям задачи 11.7, и связностями на B^*.

Замечание 11.3. Мы построили биекцию между линейными связностями Эресманна на $\operatorname{Tot} B$ и связностями на B^* или, что то же самое, связностями на B.

Задача 11.9. Пусть B – векторное расслоение на M.

а. Постройте точную последовательность пучков дифференциальных операторов на B
$$0 \longrightarrow \operatorname{End}(B) \longrightarrow \operatorname{Diff}^1 B \longrightarrow \operatorname{End} B \otimes TM \longrightarrow 0,$$
где $\operatorname{Diff}^i B$ означает пучок дифференциальных операторов порядка $\leqslant i$.

б. (*) Докажите, что задание связности на B равносильно заданию $\operatorname{End} B$-инвариантного сечения этой последовательности.

Задача 11.10 (*). Пусть δ – дифференцирование алгебры $\bigoplus_k C^\infty_k(\operatorname{Tot} B)$. Докажите, что δ продолжается до дифференцирования $C^\infty \operatorname{Tot} B$, или найдите контрпример.

11.2. Кривизна линейной связности

Определение 11.6. Пусть $\pi : X \longrightarrow Y$ – гладкая субмерсия. Векторное поле $Z \in TX$, удовлетворяющее $D\pi(Z) = 0$, называется **вертикальным**.

Задача 11.11. Пусть B – векторное расслоение на M, а $\pi : \operatorname{Tot} B \longrightarrow M$ – его тотальное пространство. Постройте естественную биекцию между послойно линейными вертикальными векторными полями на $\operatorname{Tot} B$, и сечениями $\operatorname{End} B$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.6.

Задача 11.12. Пусть B – расслоение со связностью на M, $\pi : \operatorname{Tot} B \longrightarrow M$ его тотальное пространство, $X, Y \in TM$ – векторные поля, а $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T \operatorname{Tot} B$ – подъем этих векторных полей на $\operatorname{Tot} B$, полученный из соответствующей связности Эресманна (замечание 11.3, задача 11.7).

а. Докажите, что $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ есть горизонтальный подъем $[X, Y]$.

б. Докажите, что поле $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ послойно линейно на $\operatorname{Tot} B$.

в. Обозначим горизонтальный подъем $[X, Y]$, полученный из связности, за $\widetilde{[X, Y]}$. Докажите, что $\Theta_{X,Y} := \widetilde{[X, Y]} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ послойно линейно и вертикально.

Замечание 11.4. В силу доказанного выше, $\Theta_{X,Y}$ можно считать сечением $\operatorname{End} B$ (Задача 11.11).

Задача 11.13. Пусть B – расслоение со связностью ∇ на M, а $\pi : \operatorname{Tot} B \longrightarrow M$ его тотальное пространство, снабженное связностью Эресманна (замечание 11.3, задача 11.7). Рассмотрим векторное поле $\Theta_{X,Y}$ на $\operatorname{Tot} B$, построенное в предыдущей задаче.

а. Докажите, что отображение $X, Y \longrightarrow \Theta_{X,Y}$ есть кривизна связности Эресманна на $\operatorname{Tot} B$.

б. Докажите, что после отождествления вертикальных, послойно-линейных векторных полей (задача 11.11) и $\operatorname{End} B$, этот тензор равен кривизне ∇.

Замечание 11.5. В предыдущей задаче доказывается, что кривизна связности на векторном расслоении равна кривизне соответствующей связности Эресманна.

11.3. Кривизна и связность в расслоении со структурной группой

Определение 11.7. Пусть $P \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, а V – представление G. Рассмотрим векторное расслоение $P \times_G V$; оно называется **расслоением со структурной группой** G.

Задача 11.14. Пусть $P \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, а $\mathfrak{b}$ – пространство G-инвариантных вертикальных векторных полей на P.

а. Докажите, что $\mathfrak{b}$ – пучок алгебр Ли на M, с операцией, определенной коммутантом.

б. Докажите, что это векторное расслоение на M.

в. (*) Приведите пример, когда это векторное расслоение нетривиально.

Указание. В предыдущем листке было много аналогичных утверждений.

Задача 11.15. Пусть P – главное G-расслоение, $B := P \times_G V$ – векторное расслоение над M со структурной группой G, а X – G-инвариантное векторное поле на P. Обозначим за X_1 образ X в $P \times V$.

а. Постройте G-эквивариантное сюрьективное отображение векторных расслоений на $P \times V$
$$T(P\times V) \xrightarrow{\phi} \pi^*(T\operatorname{Tot} B),$$
где $\pi: P\times V \longrightarrow \operatorname{Tot} B$ – естественная проекция. Докажите, что G-инвариантные сечения $\pi^*(T\operatorname{Tot} B)$ биективно соответствуют сечениям $T\operatorname{Tot} B$.

б. Убедитесь, что при этом отождествлении, отображение $X \longrightarrow \phi(X_1)$ задает морфизм $\mathfrak{b} \xrightarrow{v} T\operatorname{Tot} B$, где $\mathfrak{b}$ – пучок алгебр Ли, построенный в задаче 11.14. Докажите, что это отображение инъективно, если действие G на V точно.

в. Докажите, что для любого $X\in\mathfrak{b}$ векторное поле $v(X)$ на $\operatorname{Tot} B$ послойно линейно и вертикально.

Определение 11.8. В условиях предыдущей задачи, отождествим послойно линейные вертикальные векторные поля на $\operatorname{Tot} B$ с $\operatorname{End} B$ (задача 11.11). Это задает отображение $\mathfrak{b}\longrightarrow \operatorname{End} B$. Его образ $\mathfrak{g}_B$ в $\operatorname{End}(B)$ называется **алебра Ли структурной группы расслоения.**

Задача 11.16. Докажите, что $\mathfrak{g}_B\subset \operatorname{End} B$ – подрасслоение, замкнутое относительно коммутатора.

Определение 11.9. Пусть $B := P\times_G V$ – векторное расслоение над M со структурной группой G, ∇_P - связность на P, а ∇_B соответствующая ей связность на B (Замечание 11.3). Тогда ∇_B называется **связностью, согласованной со структурной группой,** или же G-связностью.

Задача 11.17. Пусть $B := P\times_G V$ – векторное расслоение над M со структурной группой G, ∇^1,∇^2 – G-связности на $\operatorname{Tot} B$, а $\sigma_1,\sigma_2: TM\longrightarrow T\operatorname{Tot} B$ – соответствующие отображения горизонтального подъема.

а. Докажите, что $\sigma_1(X)-\sigma_2(X)$ – вертикальное, послойно линейное векторное поле на $\operatorname{Tot} B$, для любого $X\in TM$.

б. Отождествив вертикальные, послойно линейные векторные поля на $\operatorname{Tot} B$ и сечения $\operatorname{End} B$, мы можем считать, что $\sigma_1(X)-\sigma_2(X)\in\operatorname{End} B$. Докажите, что $\sigma_1(X)-\sigma_2(X)$ лежит в $\mathfrak{g}_B\subset\operatorname{End} B$.

в. (!) Докажите, что пространство G-связностей на B является аффинным пространством над $\Lambda^1 M\otimes\mathfrak{g}_B$.

Задача 11.18 (!). Пусть Пусть $B := P\times_G V$ – векторное расслоение над M со структурной группой G, а $\nabla: B\longrightarrow B\otimes\Lambda^1 M$ – связность, согласованная с G. Докажите, что кривизна ∇ лежит в $\Lambda^2 M\otimes\mathfrak{g}_B$.

Задача 11.19. Пусть B – векторное расслоение со связностью ∇, а G – его группа голономии.

а. (*) Постройте редукцию структурной группы B к G, получив $B = P\times_G V$, где P – главное G-расслоение.

б. (*) Докажите, что связность на B ассоциирована с какой-то связностью на главном расслоении P.

в. (*) Докажите, что не существует редукции B к собственной подгруппе $G_1\subsetneq G$ такой, что ∇ совместима с G_1-структурой.