Векторные расслоения, лекция 1: многообразия и пучки

Миша Вербицкий

9 сентября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \stackrel{\varphi_{U,U'}}{\to} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок функций** есть пучок, сечения которого над U суть функции на U, а ограничения суть ограничения функций.

Henri Cartan (1904 - 2008);

Jean-Pierre Serre (born 15 September 1926)

Многообразия

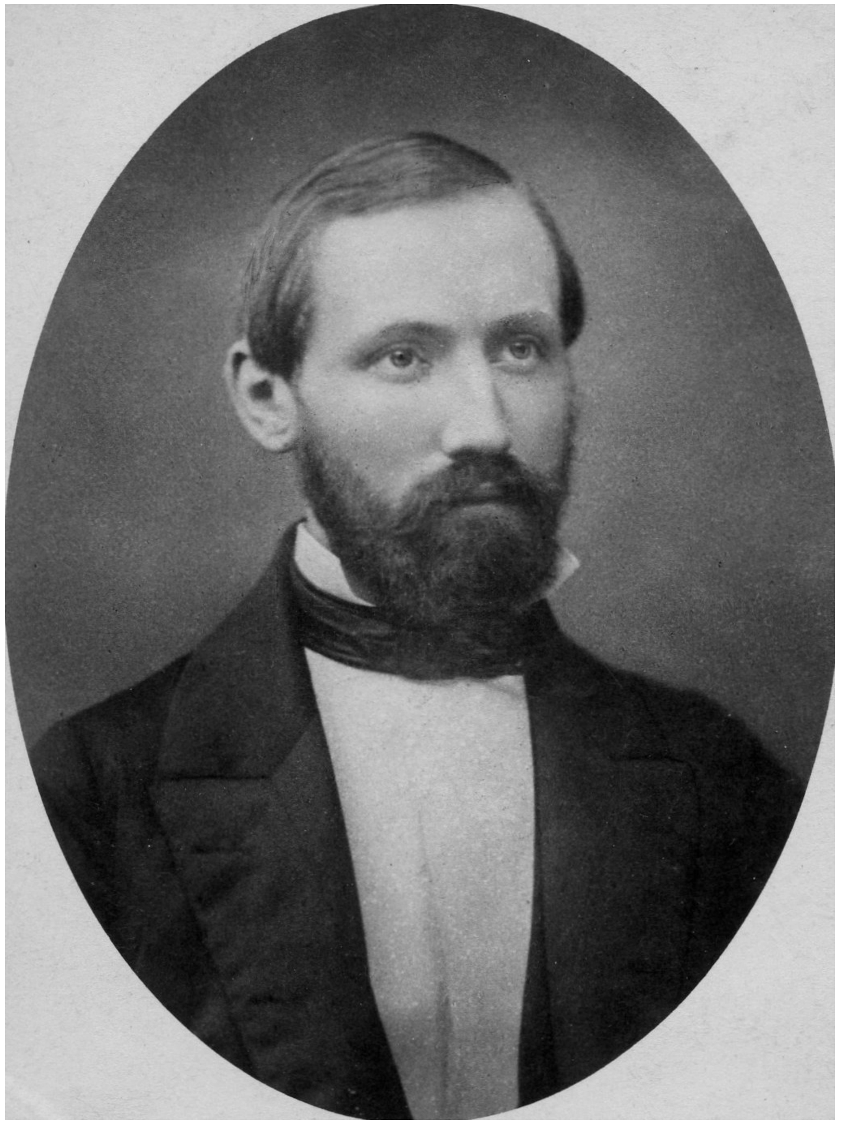
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Топологическое) многообразие есть топологическое пространство, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Гладкое многообразие есть топологическое многообразие с заданной на нем "гладкой структурой". **"Гладкую структуру" проще всего задать, используя пучки** (которые для того и были придуманы в общем-то).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Окольцованное пространство есть пространство с заданным на нем пучком функций, который замкнут относительно умножения, то есть образует кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ: Окольцованные пространства образуют категорию. Морфизмы окольцованных пространств определяются так. Пусть $A, \mathcal{F}$ и $B, \mathcal{G}$ – окольцованные пространства, а $\varphi: A \to B$ непрерывное отображение, такое, что $\varphi^*(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}$; тогда φ называется морфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гладкое многообразие $(M, C^\infty M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) $\mathbb{R}^n$ с кольцом гладких функций.



Bernhard Riemann (1826-1866),
deutscher Mathematiker
date: c. 1850

Карты и атласы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Изоморфизм гладких многообразий называется **диффеоморфизмом**. Это гомеоморфизм, который переводит гладкие функции в гладкие.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обыкновенно многообразия определяют в терминах карт, атласов и отображений переклейки. Это очень явное определение, и оно удобнее для решения задач, когда надо что-то посчитать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Покрытие $\{U_i\}$ многообразия называется **атласом**, если для каждого U_i задано отображение $\varphi_i: \ U_i \to \mathbb{R}^n$, которое задает гомеоморфизм из U_i на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. **Отображения перехода** суть отображения

$$\Phi_{ij}: \ \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

индуцированные этими гомеоморфизмами. Атлас называется **гладким**, если все отображения перехода гладкие. Множества U_i называются **картами**, гомеоморфизмы $\varphi_i: \ U_i \to \mathbb{R}^n$ – **координатами**.

Карты, атласы и пучки

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть U, V – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : U \to V$ – гомеоморфизм, переводящий гладкие функции в гладкие. **Тогда это диффеоморфизм.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\{U_i\}$ – покрытие гладкого многообразия M такое, что каждое U_i изоморфно $(\mathbb{R}^n, C^\infty\mathbb{R}^n)$. **Тогда $\{U_i\}$ – гладкий атлас.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Функции перехода переводят гладкие функции в гладкие, значит, являются диффеоморфизмами. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое многообразие, снабженное гладким атласом. **Гладкая функция** на $U \subset M$ есть функция, которая гладка на каждой из карт.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко видеть, что **гладкие функции, заданные таким образом, образуют пучок.** Это задает структуру гладкого многообразия на M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два гладких атласа называются **эквивалентными**, если соответствующие пучки гладких функций совпадают. **Гладкая структура** на многообразии есть класс эквивалентности гладких атласов.

Пучки модулей

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $A: \varphi \to B$ – гомоморфизм колец, а V – B-модуль. Тогда **на V есть естественная структура A-модуля, $av := \varphi(a)v$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ есть пучок функций, замкнутый относительно умножения, а $\mathcal{B}$ - пучок на топологическом пространстве M. Он называется **пучком $\mathcal{F}$-модулей**, если для каждого U, пространство сечений $\mathcal{B}(U)$ наделено структурой $\mathcal{F}(U)$-модуля, причем для каждого $U' \subset U$, отображение ограничения $\mathcal{B}(U) \stackrel{\varphi_{U,U'}}{\to} \mathcal{B}(U')$, задают гомоморфизм $\mathcal{F}(U)$-модулей (чтобы получить структуру $\mathcal{F}(U)$-модуля на $\mathcal{B}(U')$, воспользуйтесь предыдущим замечанием).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиальный пучок модулей** $\mathcal{F}^n$ над пучком функций $\mathcal{F}$ сопоставляет каждому U пучок $\mathcal{F}^n(U)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально тривиальный пучок модулей** над пучком функций $\mathcal{F}$ это такой пучок $\mathcal{B}$, что у каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U такая, что ограничение $\mathcal{B}\big|_U$ тривиально.

Векторные расслоения и 1-коциклы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии M есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и многообразие, **векторное расслоение можно задать в терминах карт, атласов и функций перехода.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор функций $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ 2. $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – n-мерное векторное расслоение над M, а $\{U_i\}$ – покрытие M, такое, что $B\Big|_{U_i}$ – тривиальный C^∞-модуль. Зафиксируем тривиализации $B\Big|_{U_i}$ и рассмотрим базисы в $B\Big|_{U_i}$ и $B\Big|_{U_j}$, определенные этими тривиализациями. Пусть $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} GL(n)$ – функции перехода от одного базиса к другому. **Тогда φ_{ij} задают 1-коцикл**.

Векторные расслоения, коциклы и кограницы

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} G$ – 1-коцикл. Рассмотрим набор отображений $\psi_i: U_i \to G$, и пусть $\varphi'_{ij}: U_i \cap U_j \to G$ – отображение, заданное формулой $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$. **Легко видеть, что $\{\varphi'_{ij}\}$ – тоже коцикл.** Коциклы $\{\varphi_{ij}\}$ и $\{\varphi'_{ij}\}$ называются **кограничными**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $\mathfrak{G}$ – группа всех отображений $\coprod U_i \to G$. **Группа $\mathfrak{G}$ действует на множестве 1-коциклов по формуле $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$;** соответствующее факторможество есть множество коциклов с точностью до кограниц. Оно называется **группа когомологий Чеха с коэффициентами в G, связанными с покрытием $\{U_i\}$**, и обозначается $H^1(M, \{U_i\}, G)$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – многообразие, $\{U_i\}$ – его покрытие, а $\mathfrak{S}$ - множество классов изоморфизма n-мерных расслоений, которые тривиальны на всех U_i. **Множество $\mathfrak{S}$ естественно отождествляется с $H^1(M, \{U_i\}, GL(n))$.** ■

Алгебра де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ **пространство дифференциальных i-форм на M,** то есть антисимметричных i-форм на касательном расслоении TM. Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \to \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \to \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \bigotimes_{i+j} T^* M$, полученное перемножением α и β, а Π – кососимметризация тензора.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебра $\Lambda^* M := \oplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi: M_1 \to M_2$ – гладкое отображение многообразий. Тогда задано отображение $\varphi^*: \Lambda^* M_2 \to \Lambda^* M_1$, переводящее дифференциальную форму $\eta \in \Lambda^k M_2$ в форму $(v_1, ..., v_k) \in TM_1 \to \eta(D_\varphi v_1, ..., D_\varphi(v_k))$.

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференциал де Рама** $d: \Lambda^* M \to \Lambda^{*+1} M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен дифференциалу $df \in \Omega^1 M$.

(ii) **(Правило Лейбница)** $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df, а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Дифференциал де Рама (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df, а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Существование, для любого многообразия: Зададим d локально по формуле, указанной выше. **Это определение согласовано с заменой координат в силу единственности d,** значит, d согласован с переклейкой карт. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма называется **замкнутой**, если она лежит в ядре d, и **точной**, если она лежит в образе d. Пространство $H^i(M) := \frac{\ker d}{im d}\Big|_{\Lambda^i M}$ называется **i-й группой когомологий де Рама** многообразия M.

Производная Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Поток диффеоморфизмов многообразия есть гладкое отображение $\varphi_t: M\times\mathbb{R}\to M$, которое является диффеоморфизмом для любого $t\in\mathbb{R}$. Аналогично определяется **поток симплектоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Предположим, что $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$. Тогда производная $\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0}$ есть векторное поле, которое называется **производной потока диффеоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi_t: M\times\mathbb{R}\to M$ – поток диффеоморфизмов, а $v := \left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0}$ соответствующее векторное поле. **Производная Ли вдоль** v, есть отображение $\mathrm{Lie}_v: \Lambda^i M\to\Lambda^i M$, полученное как $\mathrm{Lie}_v(\eta) := \left.\frac{\varphi_t^*\eta}{dt}\right|_{t=0}$.

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\mathrm{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает антикоммутатор, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство см. ниже.

Нечетные дифференцирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нечетное дифференцирование** алгебры де Рама есть нечетный (меняющий градуировку на нечетное число) оператор $q : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$, который удовлетворяет **(супер-)правилу Лейбница:** $q(a \wedge b) = q(a) \wedge b + (-1)^{\tilde{a}} a \wedge q(b)$.

ПРИМЕР: **Дифференциал де Рама** является нечетным дифференцированием.

ПРИМЕР: **Оператор подстановки векторного поля** является нечетным дифференцированием.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Антикоммутатор двух нечетных дифференцирований есть дифференцирование **(проверьте это).**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $d \in \operatorname{End}(\Lambda^* M)$ – нечетный оператор, который удовлетворяет $d^2 = 0$, а $L \in \operatorname{End}(\Lambda^* M)$ другой нечетный оператор. Тогда d коммутирует с $[d, L]$ **(проверьте это).**

Формула Картана (доказательство)

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\mathrm{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает антикоммутатор $\{a,b\} = ab + ba$, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство. Шаг 1: Проверяем, что Lie_v и $\{d, i_v\}$ – дифференцирования алгебры де Рама, коммутирующие с d.

Шаг 2: Проверяем, что они совпадают на функциях.

Шаг 3: Проверяем, что **дифференцирования $\Lambda^* M$, которые совпадают на функциях и коммутируют с d, равны.** ■

Развитие курса

1. Если все всем понятно (расслоения, алгебра де Рама, связности) займемся кривизной, кручением, кэлеровыми структурами, основами римановой геометрии.

2. Если непонятно, надо сделать пару занятий про расслоения, дифференциальные операторы, дифференцирования алгебры функций, символы дифференциальных операторов и так далее.

Листки по символам и дифференцированиям уже есть.