Векторные расслоения, лекция 2: связности

Миша Вербицкий

16 сентября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Векторные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии M есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и многообразие, **векторное расслоение можно задать в терминах карт, атласов и функций перехода.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор функций $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ 2. $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n-мерное векторное расслоение над M, а $\{U_i\}$ – покрытие M, такое, что $B\Big|_{U_i}$ – тривиальный C^∞-модуль. Зафиксируем тривиализации $B\Big|_{U_i}$ и рассмотрим базисы в $B\Big|_{U_i}$ и $B\Big|_{U_j}$, определенные этими тривиализациями. Пусть $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} GL(n)$ – функции перехода от одного базиса к другому. **Тогда φ_{ij} задают 1-коцикл** со значениями в $GL(n)$.

Векторные расслоения, коциклы и когграницы (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} G$ – 1-коцикл. Рассмотрим набор отображений $\psi_i: U_i \to G$, и пусть $\varphi'_{ij}: U_i \cap U_j \to G$ – отображение, заданное формулой $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$. **Легко видеть, что $\{\varphi'_{ij}\}$ – тоже коцикл.** Коциклы $\{\varphi_{ij}\}$ и $\{\varphi'_{ij}\}$ называются **когграничными**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $\mathfrak{G}$ – группа всех отображений $\coprod U_i \to G$. **Группа $\mathfrak{G}$ действует на множестве 1-коциклов по формуле $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$;** соответствующее фактормножество есть множество коциклов с точностью до когграниц. Оно называется **группа когомологий Чеха с коэффициентами в G, связанными с покрытием $\{U_i\}$**, и обозначается $H^1(M, \{U_i\}, G)$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – многообразие, $\{U_i\}$ – его покрытие, а $\mathfrak{S}$ - множество классов изоморфизма n-мерных расслоений, которые тривиальны на всех U_i. **Множество $\mathfrak{S}$ естественно отождествляется с $H^1(M, \{U_i\}, GL(n))$.**

Расслоения на $M = \mathbb{R}$

ТЕОРЕМА: Все векторные расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть B – расслоение на $M = \mathbb{R}$. Возьмем покрытие $\{U_i\}$ такое, что $B\Big|_{U_i}$ тривиально. Перейдя к измельчению и выкинув лишние U_i, можно считать, что **все U_i связны, и каждый U_i пересекается только с U_{i-1} и U_{i+1}.**

Шаг 2: Функции перехода $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n)$ нетривиальны только для $|i-j| = 1$, потому что для всех других i, j пересечение $U_i \cap U_j$ пусто. Возьмем $\psi_i = \mathrm{Id}$ на $U_i \cap U_{i-1}$ и $\psi_i = \varphi_{i,i+1}$ на $U_i\mathcal{U}_{\rangle+\infty}$, и продолжим до гладкой на все U_i. Тогда $\varphi_{ij} = \psi_i \psi_j^{-1}$ для всех i, j, то есть **соответствующий коцикл является кограницей.** ■

Расслоенные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиальное гладкое расслоение** есть гладкое отображение вида $N \times U \to U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сюрьективный морфизм многообразий $M \stackrel{\varphi}{\to} N$ называется **локально тривиальным гладким расслоением**, если у каждой точки N найдется такая окрестность U, что проекция $\varphi^{-1}(U) \to U$ является тривиальным гладким расслоением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{B}$ – n-мерное векторное расслоение над M, $x \in M$ – точка, а $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty M$ – максимальный идеал x в кольце ростков $C^\infty M$. Определим **слой $\mathcal{B}$ в x** как фактор $\mathcal{B}(M)/\mathfrak{m}_x\mathcal{B}(M)$. Слой векторного расслоения обозначается $\mathcal{B}\Big|_x$

ЗАМЕЧАНИЕ: Слой n-мерного расслоения есть n-мерное векторное пространство.

Тотальное пространство расслоения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\mathcal{B} = C^\infty M^n$ – тривиальное n-мерное векторное расслоение, а $b \in \mathcal{B}\big|_x$ – точка слоя. Рассмотрим отображение множества всех слоев $\mathcal{B}$ в $M \times \mathbb{R}^n$, переводящее $(x, \varphi = (f_1, ..., f_n))$ в $(x, f_1(x), ..., f_n(x))$. **Это отображение биективно.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определим топологию на множестве всех точек всех слоев многообразия $\mathcal{B}$ таким образом, что в каждой карте U, где $\mathcal{B}$ тривиально, биекция из множества $\{(x \in U, b \in \mathcal{B}\big|_x\}$ всех слоев в $U \times \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм. **Полученное топологическое пространство** $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ **является многообразием, локально тривиально расслоенным над** M **со слоем** $\mathbb{R}^n$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ называется **тотальным пространством расслоения**.

УПРАЖНЕНИЕ: Убедитесь, что **атлас, построенный выше, задает на** $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ **гладкую структуру.**

Пространство сечений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M \stackrel{\varphi}{\to} N$ – локально тривиальное расслоение. **Сечение** φ есть подмногообразие $S \subset M$ такое, что ограничение $\varphi\big|_S$ задает диффеоморфизм S на N.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\mathcal{B}$ – векторное расслоение на M, а $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ – его тотальное пространство. Поскольку каждый слой $\mathcal{B}_x$ является векторным пространством, и эта структура гладко зависит от $x \in M$, **сечения проекции $\operatorname{Tot}(\mathcal{B}) \to M$ образуют векторное пространство.** Кроме того, **сечения можно умножать на функции $f \in C^\infty M$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого открытого множества $U \subset M$, рассмотрим пространство сечений расслоения $\operatorname{Tot}(\mathcal{B}\big|_U)$. Легко видеть, что это пространство естественно отождествляется с $\mathcal{B}(U)$. **Это позволяет восстановить векторное расслоение (т. е. соответствующий пучок $C^\infty M$-модулей) из пространства $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$**, снабженного дополнительной структурой сложения сечений и умножения сечения на функцию.

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.** Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \operatorname{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Связность на тривиальном расслоении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – тривиальное расслоение на M, свободно порожденное $a_1, ..., a_n$: $B = \bigoplus C^\infty M \cdot a_i$. Тогда $a_1, ..., a_n$ – называется **базис сечений** или **тривиализация** B. Каждое сечение B однозначно задается в виде $b = \sum_{i=1}^n f_i a_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На тривиальном расслоении над M связность записывается в виде $\nabla_(\sum_i f_i a_i) = \sum_i (f_i \nabla a_i + a_i \otimes df_i)$. Пусть $\nabla a_i = \sum_j g_{ij} a_j$. Если $M = \mathbb{R}$, t – координата на $\mathbb{R}$, это дает $\nabla(\sum_i f_i a_i) = \sum_i (f_i \sum_j g_{ij} a_j + \frac{df_i}{dt} a_i)$. Поэтому $\nabla(\sum_i f_i a_i) = 0$ равносильно

$$\frac{df_i}{dt} = -\sum_j f_j g_{ji}, i = 1, ..., n.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка!

Параллельный перенос вдоль связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B, которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B\Big|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\Big|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b\Big|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДЕ). ■

Группа голономии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ – гладкий путь на многообразии M, соединяющий x и y а (B, ∇) – расслоение со связностью. Рассмотрим $b_x \in B_x$, ограничим (B,∇) на $\gamma([0,1])$, и решим уравнение $\nabla(b) = 0$, где $b \in B\Big|_{\gamma([0,1])}$ с начальным условием $b\Big|_x = b_x$. Этот процесс называется **параллельным переносом вектора b_x вдоль связности**, а $b_y := b\Big|_y$ называется **вектором, полученным в результате параллельного переноса b_x вдоль связности по пути $\gamma : [0,1] \to M$**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа голономии связности** есть группа эндоморфизмов слоя B_x, порожденная всеми параллельными переносами вдоль путей из x в x, где $x \in M$.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что группа голономии не зависит от выбора $x \in M$.**

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $\mathsf{Alt} \circ \nabla - d$, где $\mathsf{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \mathsf{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\mathsf{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Будет доказана на следующей лекции.