Векторные расслоения, лекция 3: кручение

Миша Вербицкий

23 сентября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

30 сентября лекции не будет!
Будет прием задач.

Векторные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии M есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и многообразие, **векторное расслоение можно задать в терминах карт, атласов и функций перехода.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор функций $U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_{ij}} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ 2. $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n-мерное векторное расслоение над M, а $\{U_i\}$ – покрытие M, такое, что $B\Big|_{U_i}$ – тривиальный C^∞-модуль. Зафиксируем тривиализации $B\Big|_{U_i}$ и рассмотрим базисы в $B\Big|_{U_i}$ и $B\Big|_{U_j}$, определенные этими тривиализациями. Пусть $U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_{ij}} GL(n)$ – функции перехода от одного базиса к другому. **Тогда φ_{ij} задают 1-коцикл** со значениями в $GL(n)$.

Векторные расслоения, коциклы и кограницы (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $U_i \cap U_j \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} G$ – 1-коцикл. Рассмотрим набор отображений $\psi_i : U_i \to G$, и пусть $\varphi'_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ – отображение, заданное формулой $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$. **Легко видеть, что $\{\varphi'_{ij}\}$ – тоже коцикл.** Коциклы $\{\varphi_{ij}\}$ и $\{\varphi'_{ij}\}$ называются **кограничными**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, M – многообразие, $\{U_i\}$ его покрытие, а $\mathfrak{G}$ – группа всех отображений $\coprod U_i \to G$. **Группа $\mathfrak{G}$ действует на множестве 1-коциклов по формуле $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$;** соответствующее фактормножество есть множество коциклов с точностью до кограниц. Оно называется **группа когомологий Чеха с коэффициентами в G, связанными с покрытием $\{U_i\}$**, и обозначается $H^1(M, \{U_i\}, G)$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – многообразие, $\{U_i\}$ – его покрытие, а $\mathfrak{S}$ - множество классов изоморфизма n-мерных расслоений, которые тривиальны на всех U_i. **Множество $\mathfrak{S}$ естественно отождествляется с $H^1(M, \{U_i\}, GL(n))$.**

ТЕОРЕМА: **Все векторные расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны.** ■

Тотальное пространство расслоения (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определим топологию на множестве всех точек всех слоев многообразия $\mathcal{B}$ таким образом, что в каждой карте U, где $\mathcal{B}$ тривиально, биекция из множества $\{(x \in U, b \in \mathcal{B}\Big|_x\}$ всех слоев в $U \times \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм. **Полученное топологическое пространство** $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ **является многообразием, локально тривиально расслоенным над** M **со слоем** $\mathbb{R}^n$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$ называется **тотальным пространством расслоения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M \stackrel{\varphi}{\to} N$ – локально тривиальное расслоение. **Сечение** φ есть подмногообразие $S \subset M$ такое, что ограничение $\varphi\Big|_S$ задает диффеоморфизм S на N.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого открытого множества $U \subset M$, рассмотрим пространство сечений расслоения $\operatorname{Tot}(\mathcal{B}\Big|_U)$. Легко видеть, что это пространство естественно отождествляется с $\mathcal{B}(U)$. **Это позволяет восстановить векторное расслоение (т. е. соответствующий пучок** $C^\infty M$**-модулей) из пространства** $\operatorname{Tot}(\mathcal{B})$, снабженного дополнительной структурой сложения сечений и умножения сечения на функцию.

Связность на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, обозначим за $\nabla_X b$ **сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.** Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \operatorname{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X. Оператор ∇_X называется **оператором ковариантной производной** по X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Производная Ли $\operatorname{Lie}_X : \Omega^i M \to \Omega^i M$ тоже удовлетворяет правилу Лейбница, но не задает связности, ибо **не линейна по X**:

$$\operatorname{Lie}_{fX} \eta = (d\eta) \lrcorner fX + d(\eta \lrcorner fX) = f \operatorname{Lie}_X \eta + (-1)^{\tilde\eta} (\eta \wedge df) \lrcorner X.$$

Связность на тривиальном расслоении (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – тривиальное расслоение на M, свободно порожденное $a_1, ..., a_n$: $B = \bigoplus C^\infty M \cdot a_i$. Тогда $a_1, ..., a_n$ – называется **базис сечений** или **тривиализация** B. Каждое сечение B однозначно задается в виде $b = \sum_{i=1}^n f_i a_i$, где $f_i \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На тривиальном расслоении над M связность записывается в виде $\nabla(\sum_i f_i a_i) = \sum_i (f_i \nabla a_i + a_i \otimes df_i)$. Пусть $\nabla a_i = \sum_j g_{ij} a_j$. Если $M = \mathbb{R}$, t – координата на $\mathbb{R}$, это дает $\nabla(\sum_i f_i a_i) = \sum_i (f_i \sum_j g_{ij} a_j + \frac{df_i}{dt} a_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На тривиальном расслоении B связность записывается так: $\nabla(x) = A(x) + dx$, где d – дифференциал (примененный почленно к каждому коэффициенту x), а A – 1-форма с коэффициентами в $\operatorname{End} B$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В этих обозначениях $\nabla(\sum_i f_i a_i) = 0$ равносильно

$$\frac{df_i}{dt} = -\sum_j f_j g_{ji}, i = 1, ..., n.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка!

Параллельный перенос вдоль связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B, которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B\Big|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\Big|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b\Big|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДЕ). ■

Группа голономии (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ – гладкий путь на многообразии M, соединяющий x и y а (B,∇) – расслоение со связностью. Рассмотрим $b_x \in B_x$, ограничим (B,∇) на $\gamma([0,1])$, и решим уравнение $\nabla(b) = 0$, где $b \in B\Big|_{\gamma([0,1])}$ с начальным условием $b\Big|_x = b_x$. Этот процесс называется **параллельным переносом вектора b_x вдоль связности**, а $b_y := b\Big|_y$ называется **вектором, полученным в результате параллельного переноса b_x вдоль связности по пути $\gamma : [0,1] \to M$**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа голономии связности** есть группа эндоморфизмов слоя B_x, порожденная всеми параллельными переносами вдоль путей из x в x, где $x \in M$.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что группа голономии не зависит от выбора $x \in M$.**

Алгебра де Рама (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ **пространство дифференциальных i-форм на M,** то есть антисимметричных i-форм на касательном расслоении TM. Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \to \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \to \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \bigotimes_{i+j} T^* M$, полученное перемножением α и β, а Π – кососимметризация тензора.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебра $\Lambda^* M := \oplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi: M_1 \to M_2$ – гладкое отображение многообразий. Тогда задано отображение $\varphi^* : \Lambda^* M_2 \to \Lambda^* M_1$, переводящее дифференциальную форму $\eta \in \Lambda^k M_2$ в форму $(v_1, ..., v_k) \in TM_1 \to \eta(D_\varphi v_1, ..., D_\varphi(v_k))$.

Дифференциал де Рама (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференциал де Рама** $d: \Lambda^* M \to \Lambda^{*+1} M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен дифференциалу $df \in \Omega^1 M$.

(ii) **(Правило Лейбница)** $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма называется **замкнутой**, если она лежит в ядре d, и **точной**, если она лежит в образе d. Пространство $H^i(M) := \frac{\ker d}{im d}\Big|_{\Lambda^i M}$ называется **i-й группой когомологий де Рама** многообразия M.

30 сентября лекции не будет!
Будет прием задач.

Производная Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Поток диффеоморфизмов** многообразия есть гладкое отображение $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \to M$, которое является диффеоморфизмом для любого $t \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется **поток симплектоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Предположим, что $\varphi_0 = \operatorname{Id}_M$. Тогда производная $\frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ есть векторное поле, которое называется **производной потока диффеоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \to M$ – поток диффеоморфизмов, а $v := \frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ соответствующее векторное поле. **Производная Ли вдоль** v, есть отображение $\operatorname{Lie}_v : \Lambda^i M \to \Lambda^i M$, полученное как $\operatorname{Lie}_v(\eta) := \frac{\varphi_t^*\eta}{dt}\Big|_{t=0}$.

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\operatorname{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает антикоммутатор, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство см. ниже.

Нечетные дифференцирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нечетное дифференцирование** алгебры де Рама есть нечетный (меняющий градуировку на нечетное число) оператор $q : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$, который удовлетворяет **(супер-)правилу Лейбница:** $q(a \wedge b) = q(a) \wedge b + (-1)^{\tilde{a}} a \wedge q(b)$.

ПРИМЕР: **Дифференциал де Рама** является нечетным дифференцированием.

ПРИМЕР: **Оператор подстановки векторного поля** является нечетным дифференцированием.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Антикоммутатор двух нечетных дифференцирований есть дифференцирование **(проверьте это).**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $d \in \operatorname{End}(\Lambda^* M)$ – нечетный оператор, который удовлетворяет $d^2 = 0$, а $L \in \operatorname{End}(\Lambda^* M)$ другой нечетный оператор. Тогда d коммутирует с $[d, L]$ **(проверьте это).**

Формула Картана (доказательство)

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\mathrm{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает антикоммутатор $\{a,b\} = ab + ba$, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство. Шаг 1: Проверяем, что Lie_v и $\{d, i_v\}$ – дифференцирования алгебры де Рама, коммутирующие с d.

Шаг 2: Проверяем, что они совпадают на функциях.

Шаг 3: Проверяем, что **дифференцирования $\Lambda^* M$, которые совпадают на функциях и коммутируют с d, равны.** ■

Дифференциал де Рама и коммутаторы

ЗАМЕЧАНИЕ: Из формулы Картана выводится такое утверждение (оно **тоже называется формула Картана**).

ТЕОРЕМА: Пусть $\eta \in \Lambda^1 M$. **Тогда**

$$d\eta(X,Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]) \quad (*)$$

для любых векторных полей $X, Y \in TM$.

Доказательство. Шаг 1: Тождество Лейбница дает $\operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) = \operatorname{Lie}_X(\eta)(Y) + \eta(\operatorname{Lie}_X Y)$.

Шаг 2: По формуле Картана, $\operatorname{Lie}_X(\eta)(Y) = d\eta(X,Y) + d(\eta \lrcorner Y)(X)$; производная Ли векторного поля - это коммутатор, $\operatorname{Lie}_X Y = [X,Y]$. Поэтому шаг 1 дает $\operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) = d\eta(X,Y) + \eta([X,Y]) + d(\eta \lrcorner Y)(X)$, или

$$d\eta(X,Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) - d(\eta \lrcorner Y)(X) \quad (**)$$

Шаг 3: Наконец, $d(\eta \lrcorner Y)(X) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y))$ (производная Ли от функции есть ее дифференциал). Подставляя в (**), получаем (*). ■

СЛЕДСТВИЕ 1: **Пусть $X, Y \in TM$ коммутируют. Тогда $d\eta(X,Y) = d\langle \eta, Y\rangle \lrcorner X - d\langle \eta, X\rangle \lrcorner Y$.**

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla(\eta) = d(\eta) - \operatorname{Alt} \circ \nabla(\eta)$, где $\operatorname{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) = & d(f\eta) - \operatorname{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) \\ = & f\left[d\eta - \operatorname{Alt}(\nabla\eta)\right] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

Кручение и коммутаторы

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая связность на $\Lambda^1 M$ дает связность на $TM = \Lambda^1 M^*$ и наоборот: $d\langle x, \eta\rangle = \langle \nabla(x), \eta\rangle + \langle x, \nabla(\eta)\rangle$. Эти связности обозначаются одной и той же буквой и **про них говорят, как про одну и ту же сущность.**

ТЕОРЕМА 1: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, $\eta \in \Lambda^1 M$ – 1-форма, а ∇ – связность на $\Lambda^1 M$. **Тогда**

$$T_\nabla(X,Y)(\eta) = \langle T^*_\nabla(X,Y), \eta\rangle,$$

где $T^*_\nabla(X,Y)$ – векторное поле, которое определяется по формуле $T^*_\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $T^*_\nabla(X, fY) = \nabla_X(fY) - f\nabla_Y X - [X, fY] = fT^*_\nabla(X,Y) + \operatorname{Lie}_X(f)Y - [X, fY] + f[X,Y] = fT^*_\nabla(X,Y)$. **Поэтому T^*_∇ – тоже линейная операция.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор T^*_∇ лежит в $\Lambda^2 M \otimes TM$, а T_∇ в $\operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = \Lambda^2 M \otimes TM$; **Теорема 1 утверждает, что эти тензоры равны.**

Кручение и коммутаторы (продолжение)

ТЕОРЕМА 1: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, $\eta \in \Lambda^1 M$ – 1-форма, а ∇ – связность на $\Lambda^1 M$. **Тогда**

$$T_\nabla(X,Y)(\eta) = \langle T^*_\nabla(X,Y), \eta \rangle, \qquad (***)$$

где $T^*_\nabla(X,Y)$ – векторное поле, которое определяется по формуле $T^*_\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку T_∇ и T^*_∇ – тензоры, достаточно проверять (***) для какого-то набора векторных полей X_i, Y_i, порождающих TM. **Поэтому можно считать, что X, Y коммутируют, и $T^*_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.**

Шаг 2: По определению, $T_\nabla(X,Y)(\eta) = d\eta(X,Y) - \langle \nabla_X \eta, Y \rangle + \langle \nabla_Y \eta, X \rangle$.

Шаг 3: $\langle \nabla_X \eta, Y \rangle = d\langle \eta, Y \rangle \lrcorner X - \langle \eta, \nabla_X Y \rangle$, то есть

$$\begin{aligned} T_\nabla(X,Y)(\eta) = & \\ & = - d\langle \eta, Y \rangle \lrcorner X + d\langle \eta, X \rangle \lrcorner Y + d\eta(X,Y) \\ & - \langle \eta, \nabla_X Y \rangle + \langle \eta, \nabla_Y X \rangle \end{aligned}$$

Вторая строчка равна нулю в силу формулы Картана (Замечание 1), что дает $T_\nabla(X,Y)(\eta) = -\langle \eta, \nabla_X Y \rangle + \langle \eta, \nabla_Y X \rangle = \langle \eta, T^*_\nabla(X,Y) \rangle$. ■