Векторные расслоения, лекция 4: связность Леви-Чивита

Миша Вербицкий

7 октября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Связность на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, обозначим за $\nabla_X b$ **сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.** Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \operatorname{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X. Оператор ∇_X называется **оператором ковариантной производной** по X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Разность двух связностей $C^\infty(M)$ линейна, и задает $C^\infty(M)$-линейное отображение $B \to \Lambda^1 M \otimes B$. И наоборот, **если добавить к связности $A \in \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$, получится снова связность**

Аффинные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Торсор** над группой G есть пространство X, снабженное свободным и транзитивным действием G, $g, x \to \rho(g, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** торсоров $(X, G, \rho) \stackrel{\Psi}{\to} (X', G', \rho')$ есть пара $\Psi_X: X \to X', \Psi_G: G \to G'$, где Ψ_G есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием G, G' на X, X' так: $\Psi_X(\rho(g,x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Торсоры образуют категорию.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством V, которое называется его **линеаризацией**. Действие V на A обозначается $a, v \to a + v$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что отображение $A \stackrel{\Psi_A}{\to} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \stackrel{\Psi_L}{\to} L'$ такой, что $\Psi_A(a+l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

СЛЕДСТВИЕ: **Пространство связностей на расслоении B есть аффинное пространство с линеаризацией $\Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$.**

Параллельный перенос вдоль связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B, которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B\Big|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\Big|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b\Big|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДЕ). ■

Алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра Ли** есть векторное пространство A, снабженное антикоммутативной, билинейной операцией $[\cdot,\cdot]: A\otimes A \to A$, которая удовлетворяет **тождеству Якоби:** $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество Якоби есть тождество Лейбница: оно означает, что операция $[a,\cdot]$ является дифференцированием.

ПРИМЕР: Алгебра $\operatorname{End}(V)$ с операцией $[a,b] = ab - ba$ является алгеброй Ли.

ПРИМЕР: Пространство дифференцирований алгебры R с операцией $[a,b] = ab - ba$ является алгеброй Ли **(проверьте это)**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Представление** алгебры Ли A есть гомоморфизм $A \to \operatorname{End} V$, где $\operatorname{End} V$ рассматривается как алгебра Ли. Пространство V называется **пространством представления**. В такой ситуации говорят, что A **действует на пространстве V**.

Алгебры Ли и инвариантные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V_1, ..., V_n$ – представления алгебры Ли A. Тогда $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_n$ снабжено действием A по формуле Лейбница

$$a(b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_n) =$$
$$= a(b_1) \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_n + b_1 \otimes a(b_2) \otimes ... \otimes b_n + ... + b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes a(b_n).$$

Двойственное пространство V^* снабжено действием A по формуле

$$\langle a(b), \xi\rangle + \langle b, a(\xi)\rangle = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – алгебра Ли, действующая на векторном пространстве V. Вектор $v \in V$ называется **a-инвариантным**, если $a(v) = 0$, и A-инвариантным, если $a(v) = 0$ для любого $a \in A$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть A – алгебра Ли, действующая на векторном пространстве V, а $v \in V$. **Докажите, что множество всех $a \in A$, таких, что $a(v) = 0$ – подалгебра Ли.**

Ортогональная алгебра $\mathfrak{so}(V)$

ПРИМЕР: Пусть $h \in V^* \otimes V^*$ – скалярное произведение. **Ортогональная алгебра Ли** $\mathfrak{so}(V)$ есть множество всех эндоморфизмов $a \in \operatorname{End} V$, которые удовлетворяют $a(h) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Докажите, что $\mathfrak{so}(V) = \{a \in \operatorname{End} V \ \ | \ \ h(a\cdot, \cdot) = -h(\cdot, a\cdot)\}$, другими словами, **$\mathfrak{so}(V)$ – алгебра Ли кососимметрических матриц.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть h невырожденно. **Тогда $\mathfrak{so}(V) = \Lambda^2 V^*$.**

Доказательство. Шаг 1: Отождествим $\operatorname{End} V = V \otimes V^*$ с $V \otimes V$, пользуясь изоморфизмом $V = V^*$, который получен из h по формуле: $v \xrightarrow{\xi} h(v, \cdot)$.

Шаг 2: Кососимметрический оператор $a \in \mathfrak{so}(V) \subset V \otimes V^*$ удовлетворяет

$$\xi \otimes \mathsf{Id}(a)(x, y) = h(a(x), y) = -h(x, a(y)), \qquad (1)$$

значит, 2-форма $\xi \otimes \mathsf{Id}(a) \in V^* \otimes V^*$ кососимметрична.

Шаг 3: Наоборот, из каждой кососимметричной формы $\omega \in \Lambda^2 V^*$ можно получить матрицу $a = (\xi \otimes \mathsf{Id})^{-1}(\omega)$, и она будет кососимметрична в силу (1). ■

Связность и тензорное произведение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi \rangle + \langle b, \nabla_X(\xi) \rangle = \mathrm{Lie}_X(\langle b, \xi \rangle).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes ... \otimes b_n) = \nabla(b_1) \otimes ... \otimes b_n + b_1 \otimes \nabla(b_2) \otimes ... \otimes b_n + b_1 \otimes ... \otimes \nabla(b_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Это те же формулы, которые определяют действие алгебры Ли на тензорном произведении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение с заданным на нем скалярным произведением h. Связность ∇ называется **ортогональной**, если $\nabla(h) = 0$.

Ортогональные связности

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Разность двух ортогональных связностей – сечение $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(B)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $A = \nabla - \nabla'$, тогда для любого $X \in TM$, матрица $A(X) = \nabla_X - \nabla'_X$ удовлетворяет $A(X)(h) = 0$, **то есть лежит в $\mathfrak{so}(B)$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Пространство ортогональных связностей есть торсор над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(B)$.** ■

Кручение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla(\eta) = d(\eta) - \mathsf{Alt} \circ \nabla(\eta)$, где $\mathsf{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) =& d(f\eta) - \mathsf{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) \\ =& f\Big[d\eta - \mathsf{Alt}(\nabla\eta)\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

Кручение и коммутаторы (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая связность на $\Lambda^1 M$ дает связность на $TM = \Lambda^1 M^*$ и наоборот: $d\langle x,\eta\rangle = \langle\nabla(x),\eta\rangle + \langle x,\nabla(\eta)\rangle$. Эти связности обозначаются одной и той же буквой и **про них говорят, как про одну и ту же сущность.**

ТЕОРЕМА 1: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, $\eta \in \Lambda^1 M$ – 1-форма, а ∇ – связность на $\Lambda^1 M$. **Тогда**

$$T_\nabla(X,Y)(\eta) = \langle T^*_\nabla(X,Y),\eta\rangle,$$

где $T^*_\nabla(X,Y)$ – векторное поле, которое определяется по формуле $T^*_\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $T^*_\nabla(X,fY) = \nabla_X(fY) - f\nabla_Y X - [X,fY] = fT^*_\nabla(X,Y) + \mathrm{Lie}_X(f)Y - [X,fY] + f[X,Y] = fT^*_\nabla(X,Y)$. **Поэтому T^*_∇ – тоже линейная операция.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор T^*_∇ лежит в $\Lambda^2 M \otimes TM$, а T_∇ в $\mathrm{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = \Lambda^2 M \otimes TM$; **Теорема 1 утверждает, что эти тензоры равны.**

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие M называется **римановым**, если на TM задано невырожденное, положительно определенное скалярное произведение g.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M,g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Доказательство ниже.

Линеаризация кручения

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении TM, их разность есть сечение $\operatorname{End}(TM) \otimes \Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(TM)$ связностей на TM есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(TM) \otimes \Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кручение есть аффинное отображение**

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \to \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla + \alpha) = T(\nabla) + \operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}: \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End}(\Lambda^1 M) \to \Lambda^2 M \otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Линеаризованное кручение** есть отображение $T_{\mathsf{lin}} = \operatorname{Alt}_{12}$,

$$T_{\mathsf{lin}}: \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M) \otimes TM \to \Lambda^2 M \otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение
$T_{\mathsf{lin}}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \stackrel{\mathsf{Alt}}{\to} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM$.
Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{\mathsf{lin}}$, η симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним, что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств. **Из этого следует единственность связности Леви-Чивита.**

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{\mathsf{lin}}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{\mathsf{lin}}(T_{\mathsf{lin}}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. ■