Векторные расслоения, лекция 5: кривизна

Миша Вербицкий

14 октября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Связность на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, обозначим за **$\nabla_X b$ сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.** Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \operatorname{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X. Оператор ∇_X называется **оператором ковариантной производной** по X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Разность двух связностей $C^\infty(M)$ линейна, и задает $C^\infty(M)$-линейное отображение $B \to \Lambda^1 M \otimes B$. И наоборот, **если добавить к связности $A \in \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$, получится снова связность**

Параллельный перенос вдоль связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B, которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B\Big|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\Big|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b\Big|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДЕ). ■

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: \ B \to B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: \ B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2 fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f \nabla^2 b$, то есть **кривизна линейна над** $C^\infty M$. **Мы будем рассматривать кривизну B как 2-форму со значениями в** $\operatorname{End} B$**:**

$$\Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End}(B).$$

Кривизна и коммутаторы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B^*(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

Тогда оператор Θ_B^* $C^\infty M$-линеен по всем трем аргументам.

Доказательство. Шаг 1: Разобьем $\Theta_B^*(X, Y, fb)$ на три компоненты: линейную, первую производную и вторую производную. Компонента с первой производной имеет вид

$$\operatorname{Lie}_Y f \nabla_X b + \operatorname{Lie}_X f \nabla_Y b - \operatorname{Lie}_Y f \nabla_X b - \operatorname{Lie}_X f \nabla_Y b - \operatorname{Lie}_{[X,Y]} fb = \operatorname{Lie}_{[X,Y]} fb,$$

компонента со второй производной имеет вид $\operatorname{Lie}_X \operatorname{Lie}_Y fb - \operatorname{Lie}_Y \operatorname{Lie}_X fb$, они сокращаются. **Поэтому $\Theta_B^*(X, Y, b)$ линеен по b.**

Шаг 2: Поскольку $[X, fY] = \operatorname{Lie}_X fY + f[X, Y]$, имеем $\nabla_{[X,fY]} b = f \nabla_{[X,Y]} b + \operatorname{Lie}_X f \nabla_Y b$.

Шаг 3: Выражение $\Theta_B^*(X, fY, b)$ имеет две компоненты, f-линейную и компоненту с производными первого порядка по f; в силу шага 2, **компонента первого порядка равна** $\operatorname{Lie}_X f \nabla_Y b - \operatorname{Lie}_X f \nabla_Y b = 0$. ■

Кривизна и коммутаторы (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\Theta_B^*(X,Y,b) := \nabla_X\nabla_Y b - \nabla_Y\nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

Это другое определение кривизны, равносильное обычному.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим $\Theta_B^* : TM \otimes TM \otimes B \to B$ как 2-форму с коэффициентами в B. Тогда $\Theta_B^* = \Theta_B$ **(определения кривизны через коммутатор и через дифференциал де Рама совпадают).**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\Theta_B^*(X,Y)$, $\Theta_B(X,Y)$ линейны по X, Y, достаточно проверять это равенство, когда X, Y коммутируют.

Шаг 2: Обозначим за $i_X : \Lambda^i M \otimes B \to \Lambda^{i-1} M \otimes B$ подстановку векторного поля X. Записав $\nabla = d + A$, где $A \in \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$, мы получим $\nabla_X = \operatorname{Lie}_X + A(X)$, что дает $[\nabla_X, i_Y] = [\operatorname{Lie}_X, i_Y] = i_{[X,Y]} = 0$.

Шаг 3:

$$\nabla^2(b)(X,Y) = (i_X i_Y - i_X i_Y)\nabla^2(b) = i_Y\nabla_X\nabla b - i_X\nabla_Y\nabla b = \nabla_X\nabla_Y b - \nabla_Y\nabla_X b.$$

■

Векторные поля и их экспоненты

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть X – векторное поле на многообразии, а $\Psi_t : \mathbb{R} \times M \to M$ соотвествующий поток диффеоморфизмов, который удовлетворяет $\frac{d\Psi_t}{dt} = X$. Тогда для каждой функции $f \in C^\infty M$, для которой ряд $e^{t\,\mathsf{Lie}_X} f$ сходится, имеем $\Psi_t f = e^{t\,\mathsf{Lie}_X} f$ Действительно,

$$\frac{de^{t\,\mathsf{Lie}_X} f}{dt} = \mathsf{Lie}_X\, e^{t\,\mathsf{Lie}_X} f = \mathsf{Lie}_X\, \Psi_t f \frac{d\Psi_t}{dt} f.$$

Другими словами, **диффеоморфизм Ψ_t записывается в виде $\Psi_t = e^{t\,\mathsf{Lie}_X}$.**

СЛЕДСТВИЕ: Если X, Y – коммутирующие векторные поля, то **траектория, полученная переносом вдоль $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$, замкнута.** Действительно, в этом случае $e^{\varepsilon X} e^{\varepsilon Y} e^{-\varepsilon X} e^{-\varepsilon Y} = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **$[X, Y] = 0$ тогда и только тогда, когда все такие траектории замкнуты.**

Кривизна и голономия

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим (B, ∇) – расслоение со связностью. Пусть X – векторное поле на многообразии, $\Psi_t: \mathbb{R} \times M \to M$ соотвествующий поток диффеоморфизмов, а Φ_t – параллельный перенос сечения вдоль кривой $\Psi_t(x)$. Тогда $\Phi_t(b) = e^{t\nabla_X}(b)$. Действительно, $\frac{d\Phi_t(b)}{dt} = \nabla_X \Phi_t(b)$, и $\frac{e^{t\nabla_X}(b)}{dt} = \nabla_X e^{t\nabla_X}(b)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X, Y – коммутирующие векторные поля, а $e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y}$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$. **Тогда соответствующее преобразование голономии удовлетворяет**

$$e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y} = 1 + \varepsilon^2 \Theta(X, Y) + o(\varepsilon^3),$$

где Θ – кривизна расслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$e^{\varepsilon a} e^{\varepsilon b} e^{-\varepsilon a} e^{-\varepsilon b} =$$

$$= \varepsilon^2 \left[ab - a^2 - ab - ba - b^2 + ab + \frac{a^2 + b^2 + a^2 + b^2}{2!} \right] + o(\varepsilon^3) =$$

$$= \varepsilon^2 (ab - ba) + o(\varepsilon^3). \quad \blacksquare$$

Кривизна и голономия (продолжение)

Следствие 1: Голономия вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$ тривиальна для всех ε тогда и только тогда, когда $\Theta(X,Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если голономия тривиальна, то $\Theta(X,Y) = 0$ в силу вышеприведенного утверждения. Если же ∇_X, ∇_Y коммутируют, то голономия вдоль ромба тривиальна, потому что она равна $e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y}$. ■

Следствие 2: Пусть M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, для любых $X, Y \in TM$ с $|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1$ норма оператора $\Theta(X,Y)$ удовлетворяет $\|\Theta(X,Y)\| \leqslant C$, а γ – путь, который можно затянуть гладким контуром площади не больше A_γ. **Тогда голономия h_γ вдоль этого пути имеет норму $|\log \|h_\gamma\|| \leqslant CA_\gamma$.**

Доказательство. Шаг 1: Для прямоугольного ромба γ со сторонами $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, \varepsilon Y$, голономия h_γ равна $1+\varepsilon^2\Theta(X,Y)+o(\varepsilon^3) \leqslant 1+CA_\gamma+o(\varepsilon^3)$. Разбивая прямоугольник на меньшие прямоугольники, получаем

$$|\log \|h_\gamma\|| \leqslant \sum_i |\log \|h_{\gamma_i}\|| + o(\varepsilon^3) \leqslant \sum_i CA_{\gamma_i} + o(\varepsilon^3).$$

Переходя к пределу по ε, получаем $|\log \|h_\gamma\|| \leqslant CA_\gamma$.

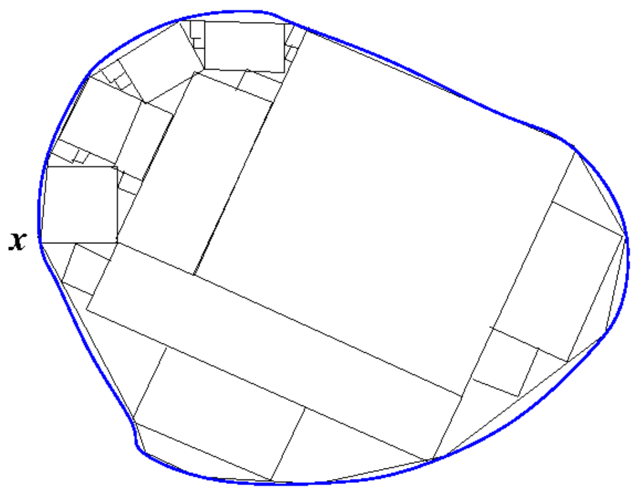
Кривизна и голономия (окончание)

Следствие 2: Пусть M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, для любых $X, Y \in TM$ с $|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1$ норма оператора $\Theta(X,Y)$ удовлетворяет $|\Theta(X,Y)| \leqslant C$, а γ – путь, который можно затянуть гладким контуром площади не больше A_γ. **Тогда голономия h_γ вдоль этого пути имеет норму $|\log \|h_\gamma\|| \leqslant CA_\gamma$.**

Шаг 2: Для общего контура, затянутого пленкой, нужная оценка получается, если разбить эту пленку на контуры γ_i, которые приближены прямоугольниками, и устремить ε к нулю:

$$|h_\gamma| \leqslant \prod_i |h_{\gamma_i}| \leqslant \prod_i (1 + CA_{\gamma_i}),$$

что дает $\log |h_\gamma| \leqslant \sum_i CA_{\gamma_i} \leqslant CA_\gamma + \varepsilon$. ■



Плоские расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Расслоение (B, ∇) называется **плоским**, если кривизна ∇ равна 0.

ТЕОРЕМА: Расслоение плоско тогда и только тогда, когда голономия вдоль любого стягиваемого пути тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из тривиальности голономии следует зануление кривизны в силу Следствия 1. Из зануления кривизны следует тривиальность голономии в силу Следствия 2: $\log|h_\gamma| \leqslant CA_\gamma$, где $C = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:
Сечение $b \in B$ называется **параллельным**, если $\nabla b = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение над M Для каждого открытого, связного, односвязного подмножества $U \subset M$, **пространство параллельных сечений $B\Big|_U$ отождествлено со слоем $B\Big|_x$,** для любой точки $x \in U$.

Плоские расслоения (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение над M Для каждого открытого, связного, односвязного подмножества $U \subset M$, **пространство параллельных сечений $B\Big|_U$ отождествлено со слоем $B\Big|_x$,** для любой точки $x \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем $b_0 \in B\Big|_x$. Для любого $y \in U$, соединим x с y путем γ, и рассмотрим решение $\nabla b\Big|_\gamma = 0$. Это задает вектор в $B\Big|_y$, который не зависит от выбора пути в силу тривиальности голономии. **Варьируя y, мы получаем сечение $b \in B\Big|_U$, которое удовлетворяет $\nabla b\Big|_\gamma = 0$ для любого пути.** Выбрав путь, который касается векторного поля X, мы также получим $\nabla_X b = 0$. ■

Локальные системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально постоянный пучок** есть пучок $\mathcal{F}$ такой, что для любых связных открытых множеств $U \supset V$, ограничение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ есть изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локальная система** на топологическом пространстве есть локально постоянный пучок векторных пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **категория локальных систем на связном многообразии M эквивалентна категории представлений фундаментальной группы.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение, а $U \to \mathcal{B}(U)$ пучок, сопоставляющий U пространство параллельных сечений B. Тогда $\mathcal{B}$ – локальная система **(проверьте это).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ – локальная система на многообразии M, где поле $k = \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty M$ есть локально свободный пучок $C^\infty M$-модулей, то есть **векторное расслоение (проверьте это)**.

Локальные системы и плоские связности

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $\mathcal{B}$ – локальная система на многообразии M, а $B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M$ соответствующее расслоение. Определим $\nabla: B \to \Lambda^1 M \otimes B$ формулой $\nabla(\sum f_i \otimes b_i) = \sum df_i \otimes b_i$, где $b_i \in \mathcal{B}(U)$ – сечения $\mathcal{B}$. **Докажите, что ∇ это связность.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связность, построенная таким образом - плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\nabla^2(\sum f_i \otimes b_i) = \nabla(\sum df_i \otimes b_i) = \sum_i d^2 f_i \otimes b_i = 0.$$

■

Мы доказали такую теорему.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим функтор ξ, переводящий расслоение с плоской связностью (B, ∇) в локальную систему $\mathcal{B} = \ker \nabla$, и ζ, переводящий локальную систему $\mathcal{B}$ в

$$(B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M, \quad \nabla(\sum f_i \otimes b_i) := \sum df_i \otimes b_i.$$

Такие функторы ξ и ζ взаимно обратны и задают эквивалентность категорий.

Пространство алгебраических тензоров кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: Имеет место разложение $V\otimes V\otimes V\otimes V$ как представления $GL(V)$: $V\otimes V\otimes V\otimes V = \Lambda^4 V\oplus \operatorname{Sym}^4 V\oplus V_{3,1}\oplus V_{2,1,1}\oplus V_{2,2}$, где $V_{3,1} = \ker \operatorname{Sym}_{34}\Big|_{\Lambda^3 V\otimes V}$, $V_{2,1,1} = \ker \operatorname{Alt}_{34}\Big|_{\operatorname{Sym}^3 V\otimes V}$, а $V_{2,2}$ **– пространство тензоров, которые антисимметричны по перестановкам 1 и 2, а также 3 и 4 множителя, симметризованные по одновременным перестановкам 1 и 4, а также 2 и 3.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $V_{2,2}$ **есть ядро умножения** $V_{2,2} = \ker\left(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)\to \Lambda^4 V\right)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $V_{2,2}\subset V\otimes V\otimes V\otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R^l_{ijk}\in \Lambda^2 M\otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl}\in\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M$. **Тогда** $R_{ijkl}\in V_{2,2}$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl}\in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$**.**

Симметрии тензора кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: (алгебраическое тождество Бьянки)
Пусть $\Theta_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ – кривизна связности Леви-Чивита. **Тогда**

$$\mathrm{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla) := \Theta_\nabla(X,Y,Z,\cdot) + \Theta_\nabla(Y,Z,X,\cdot) + \Theta_\nabla(Z,X,Y,\cdot) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем X, Y, Z, которые коммутируют. Тогда $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, etc., потому что ∇ без кручения. Значит,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla(X,Y,Z))\\ &= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y) + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Y\nabla_X Y) + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X) = 0\end{aligned}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество открыл Риччи через несколько лет после того, как Бьянки доказал "дифференциальное тождество Бьянки"

СЛЕДСТВИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\mathrm{Cycl}_{1,2,3}\Big|_{\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M}$ на все остальные компоненты $V\otimes V\otimes V\otimes V$ зануляется. ■

Разложение Риччи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – вещественное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $\dim V > 4$, а $V_{2,2}$ – пространство алгебраических тензоров кривизны. Рассмотрим отображение следа $\operatorname{Tr}_{1,3}: V_{2,2} \to \operatorname{Sym}^2 V$. Оно обозначается Ric и называется **кривизной Риччи**, а его след называется **скалярной кривизной**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим $V_{2,2}$ как представление ортогональной группы $O(V)$. **Тогда $V_{2,2}$ имеет следующие неприводимые компоненты:**

$$V_{2,2} = W \oplus \operatorname{Sym}^2_0 V \oplus \mathbb{R},$$

где $W = \ker \operatorname{Ric}$, а $\operatorname{Sym}^2_0 V$ – симметрические формы с нулевым следом, причем $\operatorname{Sym}^2_0 V \oplus \mathbb{R} = \operatorname{Sym}^2 V$ вкладывается в $V_{2,2}$ как $\operatorname{Ric}^* \operatorname{Sym}^2 V \to V_{2,2}$.

Доказательство: Howe, Roger, *Remarks on classical invariant theory* Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 539–570. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие, Θ его кривизна, а $\Theta = W + \operatorname{Ric}$ разложение тензора кривизны по компонентам $V_{2,2} = W \oplus \operatorname{Sym}^2 V$. Тензор W называется **тензором Вейля**, или **тензором конформной кривизны**, а $\operatorname{Ric} = \operatorname{Ric}(\Theta)$ – **кривизной Риччи** многообразия. След кривизны Риччи называется **скалярной кривизной**.

Словарь римановой геометрии

Римановы многообразия классифицируются в соответствии с их разложением кривизны: $\Theta = W + \mathrm{Ric}_0 + S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Риманово многообразие называется **конформно плоским**, если $W = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такие многообразия **конформно эквивалентны плоским**, то есть их метрика делается плоской после умножения на функцию; это нетривиальная теорема, доказанная Г. Вейлем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если бесследовая кривизна Риччи равна нулю, многообразие называется **Эйнштейновым**. Для такого многообразия, имеет место $\mathrm{Ric} = \lambda g$, где g это метрика, а λ – функция. В такой ситуации, **можно доказать, что функция λ постоянна.** Она называется **константой Эйнштейна**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $W = \mathrm{Ric}_0 = 0$, а $\Theta = S$, многообразие (M, g) называется **многообразием постоянной секционной кривизны** или **пространственной формой** (space form). **Такие многообразия локально изометричны римановой сфере, пространству Лобачевского, или $\mathbb{R}^n$.**