

Векторные расслоения, лекция 5: кривизна

Миша Вербицкий
14 октября, 2013
матфак ВШЭ и НМУ

Связность на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность** на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, обозначим за $\nabla_X b$ сечение B , полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$. Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \text{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X . Оператор ∇_X называется **оператором ковариантной производной** по X .

ЗАМЕЧАНИЕ: Разность двух связностей $C^\infty(M)$ линейна, и задает $C^\infty(M)$ -линейное отображение $B \rightarrow \Lambda^1 M \otimes B$. И наоборот, **если добавить к связности $A \in \Lambda^1 M \otimes \text{End } B$, получится снова связность**

Параллельный перенос вдоль связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B , которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над \mathbb{R} . Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на \mathbb{R} тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДЕ). ■

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \rightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde{n}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \rightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇ .

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f\nabla^2b$, то есть **кривизна линейна над $C^\infty M$. Мы будем рассматривать кривизну B как 2-форму со значениями в $\text{End } B$:**

$$\Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \text{End}(B).$$

Кривизна и коммутаторы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B^*(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X, Y]} b$$

Тогда оператор Θ_B^* $C^\infty M$ -линеен по всем трем аргументам.

Доказательство. Шаг 1: Разобьем $\Theta_B^*(X, Y, fb)$ на три компоненты: линейную, первую производную и вторую производную. Компонента с первой производной имеет вид

$\text{Lie}_Y f \nabla_X b + \text{Lie}_X f \nabla_Y b - \text{Lie}_Y f \nabla_X b - \text{Lie}_X f \nabla_Y b - \text{Lie}_{[X, Y]} fb = \text{Lie}_{[X, Y]} fb$,
компонента со второй производной имеет вид $\text{Lie}_X \text{Lie}_Y fb - \text{Lie}_Y \text{Lie}_X fb$, они сокращаются. **Поэтому $\Theta_B^*(X, Y, b)$ линеен по b .**

Шаг 2: Поскольку $[X, fY] = \text{Lie}_X fY + f[X, Y]$, имеем $\nabla_{[X, fY]} b = f \nabla_{[X, Y]} b + \text{Lie}_X f \nabla_Y b$.

Шаг 3: Выражение $\Theta_B^*(X, fY, b)$ имеет две компоненты, f -линейную и компоненту с производными первого порядка по f ; в силу шага 2, **компонента первого порядка равна $\text{Lie}_X f \nabla_Y b - \text{Lie}_X f \nabla_Y b = 0$.** ■

Кривизна и коммутаторы (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\Theta_B^*(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X, Y]} b$$

Это другое определение кривизны, равносильное обычному.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим $\Theta_B^* : TM \otimes TM \otimes B \rightarrow B$ как 2-форму с коэффициентами в B . Тогда $\Theta_B^* = \Theta_B$ (определения кривизны через коммутатор и через дифференциал де Рама совпадают).

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\Theta_B^*(X, Y)$, $\Theta_B(X, Y)$ линейны по X, Y , достаточно проверять это равенство, когда X, Y коммутируют.

Шаг 2: Обозначим за $i_X : \Lambda^i M \otimes B \rightarrow \Lambda^{i-1} M \otimes B$ подстановку векторного поля X . Записав $\nabla = d + A$, где $A \in \Lambda^1 M \otimes \text{End } B$, мы получим $\nabla_X = \text{Lie}_X + A(X)$, что дает $[\nabla_X, i_Y] = [\text{Lie}_X, i_Y] = i_{[X, Y]} = 0$.

Шаг 3:

$$\nabla^2(b)(X, Y) = (i_X i_Y - i_Y i_X) \nabla^2(b) = i_Y \nabla_X \nabla b - i_X \nabla_Y \nabla b = \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b.$$

■

Векторные поля и их экспоненты

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть X – векторное поле на многообразии, а $\Psi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ соответствующий поток диффеоморфизмов, который удовлетворяет $\frac{d\Psi_t}{dt} = X$. Тогда для каждой функции $f \in C^\infty M$, для которой ряд $e^{t \text{Lie}_X} f$ сходится, имеем $\Psi_t f = e^{t \text{Lie}_X} f$. Действительно,

$$\frac{d e^{t \text{Lie}_X} f}{dt} = \text{Lie}_X e^{t \text{Lie}_X} f = \text{Lie}_X \Psi_t f \frac{d\Psi_t}{dt} f.$$

Другими словами, **диффеоморфизм Ψ_t записывается в виде $\Psi_t = e^{t \text{Lie}_X}$.**

СЛЕДСТВИЕ: Если X, Y – коммутирующие векторные поля, то **траектория, полученная переносом вдоль $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$, замкнута.** Действительно, в этом случае $e^{\varepsilon X} e^{\varepsilon Y} e^{-\varepsilon X} e^{-\varepsilon Y} = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **$[X, Y] = 0$ тогда и только тогда, когда все такие траектории замкнуты.**

Кривизна и голономия

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим (B, ∇) – расслоение со связностью. Пусть X – векторное поле на многообразии, $\Psi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ соответствующий поток диффеоморфизмов, а Φ_t – параллельный перенос сечения вдоль кривой $\Psi_t(x)$. Тогда $\Phi_t(b) = e^{t\nabla_X}(b)$. Действительно, $\frac{d\Phi_t(b)}{dt} = \nabla_X \Phi_t(b)$, и $\frac{e^{t\nabla_X}(b)}{dt} = \nabla_X e^{t\nabla_X}(b)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X, Y – коммутирующие векторные поля, а $e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y}$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$. **Тогда соответствующее преобразование голономии удовлетворяет**

$$e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y} = 1 + \varepsilon^2 \Theta(X, Y) + o(\varepsilon^3),$$

где Θ – кривизна расслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon a} e^{\varepsilon b} e^{-\varepsilon a} e^{-\varepsilon b} &= \\ &= \varepsilon^2 \left[ab - a^2 - ab - ba - b^2 + ab + \frac{a^2 + b^2 + a^2 + b^2}{2!} \right] + o(\varepsilon^3) = \\ &= \varepsilon^2 (ab - ba) + o(\varepsilon^3). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Кривизна и голономия (продолжение)

Следствие 1: Голономия вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$ тривиальна для всех ε тогда и только тогда, когда $\Theta(X, Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если голономия тривиальна, то $\Theta(X, Y) = 0$ в силу вышеприведенного утверждения. Если же ∇_X, ∇_Y коммутируют, то голономия вдоль ромба тривиальна, потому что она равна $e^{\varepsilon\nabla_X} e^{\varepsilon\nabla_Y} e^{-\varepsilon\nabla_X} e^{-\varepsilon\nabla_Y}$. ■

Следствие 2: Пусть M – открытое подмножество в \mathbb{R}^n , для любых $X, Y \in TM$ с $|X| \leq 1, |Y| \leq 1$ норма оператора $\Theta(X, Y)$ удовлетворяет $\|\Theta(X, Y)\| \leq C$, а γ – путь, который можно затянуть гладким контуром площади не больше A_γ . Тогда голономия h_γ вдоль этого пути имеет норму $|\log \|h_\gamma\|| \leq CA_\gamma$.

Доказательство. Шаг 1: Для прямоугольного ромба γ со сторонами $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, \varepsilon Y$, голономия h_γ равна $1 + \varepsilon^2 \Theta(X, Y) + o(\varepsilon^3) \leq 1 + CA_\gamma + o(\varepsilon^3)$. Разбивая прямоугольник на меньшие прямоугольники, получаем

$$|\log \|h_\gamma\|| \leq \sum_i |\log \|h_{\gamma_i}\|| + o(\varepsilon^3) \leq \sum_i CA_{\gamma_i} + o(\varepsilon^3).$$

Переходя к пределу по ε , получаем $|\log \|h_\gamma\|| \leq CA_\gamma$.

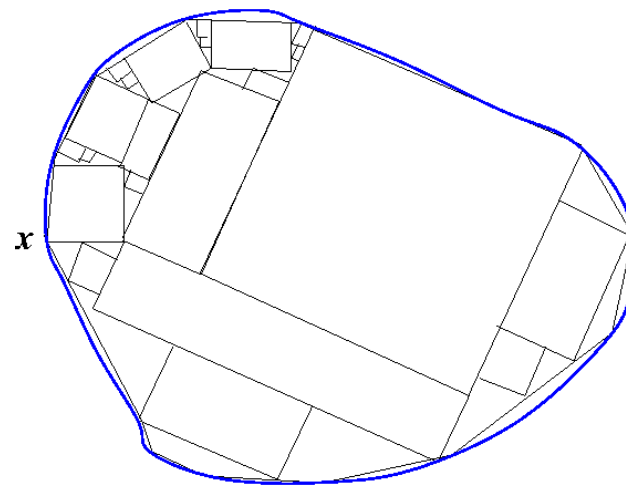
Кривизна и голономия (окончание)

Следствие 2: Пусть M – открытое подмножество в \mathbb{R}^n , для любых $X, Y \in TM$ с $|X| \leq 1, |Y| \leq 1$ норма оператора $\Theta(X, Y)$ удовлетворяет $|\Theta(X, Y)| \leq C$, а γ – путь, который можно затянуть гладким контуром площади не больше A_γ . **Тогда голономия h_γ вдоль этого пути имеет норму $|\log \|h_\gamma\|| \leq CA_\gamma$.**

Шаг 2: Для общего контура, затянутого пленкой, нужная оценка получается, если разбить эту пленку на контуры γ_i , которые приближены прямоугольниками, и устремить ε к нулю:

$$|h_\gamma| \leq \prod_i |h_{\gamma_i}| \leq \prod_i (1 + CA_{\gamma_i}),$$

что дает $\log |h_\gamma| \leq \sum_i CA_{\gamma_i} \leq CA_\gamma + \varepsilon$. ■



Плоские расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Расслоение (B, ∇) называется **плоским**, если кривизна ∇ равна 0.

ТЕОРЕМА: Расслоение плоско тогда и только тогда, когда голономия вдоль любого стягиваемого пути тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из тривиальности голономии следует зануление кривизны в силу Следствия 1. Из зануления кривизны следует тривиальность голономии в силу Следствия 2: $\log |h_\gamma| \leq CA_\gamma$, где $C = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Сечение $b \in B$ называется **параллельным**, если $\nabla b = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение над M . Для каждого открытого, связного, односвязного подмножества $U \subset M$, **пространство параллельных сечений $B|_U$ отождествлено со слоем $B|_x$** , для любой точки $x \in U$.

Плоские расслоения (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение над M . Для каждого открытого, связного, односвязного подмножества $U \subset M$, **пространство параллельных сечений $B|_U$ отождествлено со слоем $B|_x$** , для любой точки $x \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем $b_0 \in B|_x$. Для любого $y \in U$, соединим x с y путем γ , и рассмотрим решение $\nabla b|_\gamma = 0$. Это задает вектор в $B|_y$, который не зависит от выбора пути в силу тривиальности голономии. **Варьируя y , мы получаем сечение $b \in B|_U$, которое удовлетворяет $\nabla b|_\gamma = 0$ для любого пути.** Выбрав путь, который касается векторного поля X , мы также получим $\nabla_X b = 0$. ■

Локальные системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально постоянный пучок** есть пучок \mathcal{F} такой, что для любых связных открытых множеств $U \supset V$, ограничение $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ есть изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локальная система** на топологическом пространстве есть локально постоянный пучок векторных пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **категория локальных систем на связном многообразии M эквивалентна категории представлений фундаментальной группы.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение, а $U \rightarrow \mathcal{B}(U)$ пучок, сопоставляющий U пространство параллельных сечений B . Тогда \mathcal{B} – локальная система **(проверьте это)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть \mathcal{F} – локальная система на многообразии M , где поле $k = \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty M$ есть локально свободный пучок $C^\infty M$ -модулей, то есть **векторное расслоение (проверьте это)**.

Локальные системы и плоские связности

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть \mathcal{B} – локальная система на многообразии M , а $B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M$ соответствующее расслоение. Определим $\nabla : B \rightarrow \Lambda^1 M \otimes B$ формулой $\nabla(\sum f_i \otimes b_i) = \sum df_i \otimes b_i$, где $b_i \in \mathcal{B}(U)$ – сечения \mathcal{B} . **Докажите, что ∇ это связность.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связность, построенная таким образом – плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\nabla^2(\sum f_i \otimes b_i) = \nabla(\sum df_i \otimes b_i) = \sum_i d^2 f_i \otimes b_i = 0.$$

■

Мы доказали такую теорему.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим функтор ξ , переводящий расслоение с плоской связностью (B, ∇) в локальную систему $\mathcal{B} = \ker \nabla$, и ζ , переводящий локальную систему \mathcal{B} в

$$(B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M, \quad \nabla(\sum f_i \otimes b_i) := \sum df_i \otimes b_i).$$

Такие функторы ξ и ζ взаимно обратны и задают эквивалентность категорий.

Пространство алгебраических тензоров кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: Имеет место разложение $V \otimes V \otimes V \otimes V$ как представления $GL(V)$: $V \otimes V \otimes V \otimes V = \Lambda^4 V \oplus \text{Sym}^4 V \oplus V_{3,1} \oplus V_{2,1,1} \oplus V_{2,2}$, где $V_{3,1} = \ker \text{Sym}_{34} \Big|_{\Lambda^3 V \otimes V}$, $V_{2,1,1} = \ker \text{Alt}_{34} \Big|_{\text{Sym}^3 V \otimes V}$, а $V_{2,2}$ – пространство тензоров, которые антисимметричны по перестановкам 1 и 2, а также 3 и 4 множителя, симметризованные по одновременным перестановкам 1 и 4, а также 2 и 3.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $V_{2,2}$ есть ядро умножения $V_{2,2} = \ker(\text{Sym}^2(\Lambda^2 V) \rightarrow \Lambda^4 V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $V_{2,2} \subset V \otimes V \otimes V \otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R_{ijk}^l \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда** $R_{ijkl} \in V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl} \in \text{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$.

Симметрии тензора кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: (алгебраическое тождество Бьянки)

Пусть $\Theta_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ – кривизна связности Леви-Чивита. **Тогда**

$$\text{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla) := \Theta_\nabla(X, Y, Z, \cdot) + \Theta_\nabla(Y, Z, X, \cdot) + \Theta_\nabla(Z, X, Y, \cdot) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем X, Y, Z , которые коммутируют. Тогда $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, etc., потому что ∇ без кручения. Значит,

$$\begin{aligned} & \text{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla(X, Y, Z)) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y) + (\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Y \nabla_X Y) + (\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X) = 0 \end{aligned}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество открыл Риччи через несколько лет после того, как Бьянки доказал "дифференциальное тождество Бьянки"

СЛЕДСТВИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\text{Cycl}_{1,2,3} \Big|_{\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M}$ на все остальные компоненты $V \otimes V \otimes V \otimes V$ зануляется. ■

Разложение Риччи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – вещественное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $\dim V > 4$, а $V_{2,2}$ – пространство алгебраических тензоров кривизны. Рассмотрим отображение следа $\text{Tr}_{1,3} : V_{2,2} \rightarrow \text{Sym}^2 V$. Оно обозначается Ric и называется **кривизной Риччи**, а его след называется **скалярной кривизной**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим $V_{2,2}$ как представление ортогональной группы $O(V)$. Тогда $V_{2,2}$ имеет следующие неприводимые компоненты:

$$V_{2,2} = W \oplus \text{Sym}_0^2 V \oplus \mathbb{R},$$

где $W = \ker \text{Ric}$, а $\text{Sym}_0^2 V$ – симметрические формы с нулевым следом, причем $\text{Sym}_0^2 V \oplus \mathbb{R} = \text{Sym}^2 V$ вкладывается в $V_{2,2}$ как $\text{Ric}^* \text{Sym}^2 V \rightarrow V_{2,2}$.

Доказательство: Howe, Roger, *Remarks on classical invariant theory* Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 539–570. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие, Θ его кривизна, а $\Theta = W + \text{Ric}$ разложение тензора кривизны по компонентам $V_{2,2} = W \oplus \text{Sym}^2 V$. Тензор W называется **тензором Вейля**, или **тензором конформной кривизны**, а $\text{Ric} = \text{Ric}(\Theta)$ – **кривизной Риччи** многообразия. След кривизны Риччи называется **скалярной кривизной**.

Словарь римановой геометрии

Римановы многообразия классифицируются в соответствии с их разложением кривизны: $\Theta = W + \text{Ric}_0 + S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Риманово многообразие называется **конформно плоским**, если $W = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такие многообразия **конформно эквивалентны плоским**, то есть их метрика делается плоской после умножения на функцию; это нетривиальная теорема, доказанная Г. Вейлем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если бесследовая кривизна Риччи равна нулю, многообразии называется **Эйнштейновым**. Для такого многообразия, имеет место $\text{Ric} = \lambda g$, где g это метрика, а λ – функция. В такой ситуации, **можно доказать, что функция λ постоянна**. Она называется **константой Эйнштейна**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $W = \text{Ric}_0 = 0$, а $\Theta = S$, многообразие (M, g) называется **многообразием постоянной секционной кривизны** или **пространственной формой** (space form). Такие многообразия локально изометричны римановой сфере, пространству Лобачевского, или \mathbb{R}^n .