Векторные расслоения, лекция 6: кривизна (продолжение)

Миша Вербицкий

21 октября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Связность на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, обозначим за **$\nabla_X b$ сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.** Оператор ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla_X(fb) = f\nabla_X b + \operatorname{Lie}_X fb$, где Lie_X – производная вдоль X. Оператор ∇_X называется **оператором ковариантной производной** по X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Разность двух связностей $C^\infty(M)$ линейна, и задает $C^\infty(M)$-линейное отображение $B \to \Lambda^1 M \otimes B$. И наоборот, **если добавить к связности $A \in \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$, получится снова связность**

Параллельный перенос вдоль связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью. Сечение B, которое удовлетворяет $\nabla b = 0$, называется **параллельным**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой $x \in \mathbb{R}$, $b_x \in B\Big|_x$, **существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\Big|_x = b_x$.**

Доказательство. Шаг 1: Расслоение B тривиально (все расслоения на $\mathbb{R}$ тривиальны).

Шаг 2: Решение уравнения $\sum_i (f_i \nabla a_i + \frac{df_i}{dt} a_i) = 0$ всегда существует и однозначно задается начальным условием $b\Big|_x = b_x$ (теорема о существовании и единственности решений ОДУ). ■

Кривизна связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: \ B \to B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^1(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^2(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^3(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: \ B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

Тогда оператор $\Theta_B(X, Y)$ $C^\infty M$-линеен по всем трем аргументам, и удовлетворяет $\nabla^2(X, Y)(b) = \Theta_B(X, Y)$. ■

Векторные поля и их экспоненты (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \in TM$ – векторное поле на многообразии, а $\Psi_t : \mathbb{R} \times M \to M$ соответствующий поток диффеоморфизмов, такой, что $\Psi_t^{-1} \frac{d\Psi_t}{dt} = X$. Обозначим Ψ_t за $\exp(tX)$. Этот поток иногда называют **экспонентой** X.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля. Тогда $\frac{d}{dt}(\exp(tX)_* Y) = [X, Y]$ (докажите это). **Среди прочего, из этого следует, что**

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big[\exp(\varepsilon X)\exp(\varepsilon Y)\exp(-\varepsilon X)\exp(-\varepsilon Y)\Big] = [X, Y]$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Если X, Y – коммутирующие векторные поля, то **траектория, полученная переносом вдоль $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$, замкнута.** Действительно, в этом случае $\exp(\varepsilon X)\exp(\varepsilon Y)\exp(-\varepsilon X)\exp(-\varepsilon Y) = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $[X, Y] = 0$ **тогда и только тогда, когда все такие траектории замкнуты.**

Кривизна и голономия (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим (B, ∇) – расслоение со связностью. Пусть X – векторное поле на многообразии, $\Psi_t: \mathbb{R} \times M \to M$ соотвествующий поток диффеоморфизмов, а $\exp(t\nabla_X)(b)$ – оператор параллельного переноса сечения b вдоль кривой $\exp(tX)$. **Тогда для любых коммутирующих полей $X, Y \in TM$, имеем**

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big[\exp(\varepsilon\nabla_X)\exp(\varepsilon\nabla_Y)\exp(-\varepsilon\nabla_X)\exp(-\varepsilon\nabla_Y)\Big](b) = \Theta(X, Y)(b),$$

СЛЕДСТВИЕ: Голономия вдоль ромба $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon X, -\varepsilon Y$ тривиальна для всех ε тогда и только тогда, когда $\Theta(X, Y) = 0$.

ЛЕММА: Пусть M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $X, Y \in TM$ – коммутирующие векторные поля, а $h_\varepsilon := \exp(\varepsilon\nabla_X)\exp(\varepsilon\nabla_Y)\exp(-\varepsilon\nabla_{X+Y})$ – оператор параллельного переноса сечения вдоль треугольника $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon(X+Y)$. **Тогда $h_\varepsilon = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Theta(X, Y)(b) + \varepsilon^3\delta$, где $|\delta|$ ограничен константой C, которая не зависит от ε.**

Кривизна и голономия вокруг контура, обходящего треугольник

Утверждение 1: Пусть $M = \mathbb{R}^n$, (B, ∇) – расслоение со связностью на M, а γ – путь, обходящий границы плоского треугольника D со сторонами, которые равны векторам $X, Y, -(X+Y) \in \mathbb{R}^n$. **Тогда собственные значения α_i соответствующего преобразования голономии h удовлетворяют**

$$|\log \alpha_i| \leqslant \sup_{z \in D} \left\| \Theta(X,Y)\Big|_z \right\|,$$

где $\Theta(X,Y)\Big|_z \in \operatorname{End}(B\Big|_z)$ – значение кривизны в z, а $\left\|\Theta(X,Y)\Big|_z\right\|$ ее операторная норма, то есть максимум модуля собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Разобьем треугольник γ в объединение N^2 треугольников γ_ε со сторонами $\varepsilon X, \varepsilon Y, -\varepsilon(X+Y) \in \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon = \frac{1}{N}$, и применим предыдущую лемму. **Логарифм h разложится в сумму операторов голономии вокруг N^2 маленьких треугольников, которые ограничены сверху $N^{-2}(\Theta(X,Y)(b) + \varepsilon\delta)$.** ■

Топология на пространстве гладких путей в $\mathbb{R}^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma: [0,1] \to M$ – гладкий путь в $M = \mathbb{R}^n$, а

$$\gamma^{(k)}: [0,1] \to TM = \mathbb{R}^n$$

– k-я производная отображения γ. Определим на пространстве путей $\gamma: [0,1] \to M$ **C^r-метрику** d_{C^r} формулой

$$d_{C^r}(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_{z \in [0,1]} \sum_{i=0}^{k} \|\gamma_1^{(i)}(z) - \gamma_2^{(i)}(z)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма на TM, индуцированная плоской римановой метрикой на $M = \mathbb{R}^n$. Соответствующая топология называется **C^r-топологией.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что C^r-топология на пространстве путей в $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$.**

Топология на пространстве гладких путей на многообразии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – многообразие, а $\operatorname{Map}([a,b],M)$ – пространство путей. Зафиксируем атлас $\{U_\alpha \stackrel{\varphi_\alpha}{\to} \mathbb{R}^n\}$ на M. Разбив заданные пути γ, γ' в объединение путей $\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}$, $\gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}$, которые лежат в картах $U_i \cong \mathbb{R}^n$, определим $d_{C^r}(\gamma,\gamma')$ как

$$d_{C^r}(\gamma,\gamma') := \inf \sum_i d_{C^r}\left(\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}, \gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}\right)$$

где инфимум взят по всем разбиениям и картам из атласа, а каждое из слагаемых $d_{C^r}\left(\gamma\Big|_{[a_i,b_i]}, \gamma'\Big|_{[a_i,b_i]}\right)$ вычислено в своей карте U_i. Соответствующая топология называется **C^r-топологией.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что C^r-топология на пространстве путей в M не зависит от выбора атласа $\{U_\alpha \stackrel{\varphi_\alpha}{\to} \mathbb{R}^n\}$.

Зависимость голономии от контура: C^1-топология

Лемма 1: Пусть $f: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – векторнозначная функция, $A: [0,1] \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ – эндоморфизм, зависящий от параметра $t \in [0,1]$, а $f' = A(t)f$ – дифференциальное уравнение. Рассмотрим функцию $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, ставящую точке $t \in [0,1]$ в соответствие операторную норму (максимальное собственное значение) $A(t)$. Пусть $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ преобразование, которое ставит начальному условию $f(0)$ значение $f(1)$ решения уравнения $f' = A(t)f$, а α_i – собственные значения h. **Тогда** $\log \alpha_i| \leqslant \int_{[0,1]} \alpha(t)$**.**

■

Утверждение 2: Пусть (B, ∇_0) – тривиальное расслоение над M с тривиальной связностью $\nabla_0(\sum_i f_i b_i) = \sum_i df_i \otimes b_i$, а $\nabla := \nabla_0 + A$ – еще одна связность. Рассмотрим петлю γ в M, и пусть h_γ – соответствующее преобразование голономии, индуцированное ∇. Рассмотрим функцию $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, ставящую точке $t \in [0,1]$ в соответствие операторную норму (максимальное собственное значение) $A(\dot\gamma(t))$. **Тогда собственные значения α_i оператора h_γ удовлетворяют** $|\log \alpha_i| \leqslant \int_\gamma \alpha(t)dt$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Сразу следует из Леммы 1. ■

Зависимость голономии от контура: C^1-топология (продолжение)

Утверждение 2: Пусть (B, ∇_0) – тривиальное расслоение над M с тривиальной связностью $\nabla_0(\sum_i f_i b_i) = \sum_i df_i \otimes b_i$, а $\nabla := \nabla_0 + A$ – еще одна связность. Рассмотрим петлю γ в M, и пусть h_γ – соответствующее преобразование голономии, индуцированное ∇. Рассмотрим функцию $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, ставящую точке $t \in [0,1]$ в соответствие операторную норму (максимальное собственное значение) $A(\dot\gamma(t))$. **Тогда собственные значения α_i оператора h_γ удовлетворяют $|\log \alpha_i| \leqslant \int_\gamma \alpha(t)dt$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Сразу следует из Леммы 1. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть W_x – пространство кусочно-гладких петель с началом и концом в $x \in M$, (B, ∇) – расслоение со связностью, а h_γ – соответствующее преобразование голономии. **Тогда h_γ непрерывно в C^1-топологии на W_x.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По определению C^1-топологии, достаточно проверить это утверждение локально в карте, диффеоморфной $\mathbb{R}^n$. Там это следует из Утверждения 2. ■

Зависимость голономии от контура: C^0-топология

ТЕОРЕМА: Пусть W_x – пространство кусочно-гладких петель с началом и концом в $x \in M$ и производной $\dot{\gamma}$, которая ограничена константой C, (B, ∇) – расслоение со связностью, а h_γ – соответствующее преобразование голономии. **Тогда h_γ непрерывно в C^0-топологии на W_x.**

Доказательство. Шаг 1:
Достаточно проверить эту теорему для $M = \mathbb{R}^n$.

Шаг 2: Для треугольного контура это следует из Утверждения 1 **(голономия вдоль треугольника ограничивается произведением площади треугольника и максимума собственных значений кривизны).**

Шаг 3: Для кусочно-линейного контура непрерывность следует, **если разбить этот контур на треугольные и применить шаг 2.**

Шаг 4: Для гладких контуров это следует, потому что **кусочно-линейные пути плотны в C^1-топологии в пространстве кусочно-гладких путей**, а непрерывность голономии в C^1-топологии уже доказана. ■

Плоские расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Расслоение (B, ∇) называется **плоским**, если кривизна ∇ равна 0.

ТЕОРЕМА: Расслоение плоско тогда и только тогда, когда голономия вдоль любого стягиваемого пути тривиальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:
Сечение $b \in B$ называется **параллельным**, если $\nabla b = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение над M Для каждого открытого, связного, односвязного подмножества $U \subset M$, **пространство параллельных сечений $B\big|_U$ отождествлено со слоем $B\big|_x$,** для любой точки $x \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем вектор $v \in B\big|_x$, и разнесем его на все M параллельными переносами. ■

Локальные системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально постоянный пучок** есть пучок $\mathcal{F}$ такой, что для любых связных открытых множеств $U \supset V$, ограничение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ есть изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локальная система** на топологическом пространстве есть локально постоянный пучок векторных пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **категория локальных систем на связном многообразии M эквивалентна категории представлений фундаментальной группы.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – плоское расслоение, а $U \to \mathcal{B}(U)$ пучок, сопоставляющий U пространство параллельных сечений $B\Big|_U$. Тогда $\mathcal{B}$ – локальная система **(проверьте это).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ – локальная система на многообразии M, где поле $k = \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty M$ есть локально свободный пучок $C^\infty M$-модулей, то есть **векторное расслоение (проверьте это)**.

Локальные системы и плоские связности

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $\mathcal{B}$ – локальная система на многообразии M, а $B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M$ соответствующее расслоение. Определим $\nabla : B \to \Lambda^1 M \otimes B$ формулой $\nabla(\sum f_i \otimes b_i) = \sum df_i \otimes b_i$, где $b_i \in \mathcal{B}(U)$ – сечения $\mathcal{B}$. **Докажите, что ∇ это связность.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связность, построенная таким образом - плоская.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\nabla^2(\sum f_i \otimes b_i) = \nabla(\sum df_i \otimes b_i) = \sum_i d^2 f_i \otimes b_i = 0.$$

■

Мы доказали такую теорему.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим функтор ξ, переводящий расслоение с плоской связностью (B, ∇) в локальную систему $\mathcal{B} = \ker \nabla$, и ζ, переводящий локальную систему $\mathcal{B}$ в плоское расслоение (B, ∇)

$$\left(B := \mathcal{B} \otimes C^\infty M, \quad \nabla(\sum f_i \otimes b_i) := \sum df_i \otimes b_i\right).$$

Такие функторы ξ и ζ взаимно обратны и задают эквивалентность категорий.

Пространство алгебраических тензоров кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: Имеет место разложение $V \otimes V \otimes V \otimes V$ как представления $GL(V)$: $V \otimes V \otimes V \otimes V = \Lambda^4 V \oplus \operatorname{Sym}^4 V \oplus V_{3,1} \oplus V_{2,1,1} \oplus V_{2,2}$, где $V_{3,1} = \ker \operatorname{Sym}_{34}\Big|_{\Lambda^3 V \otimes V}$, $V_{2,1,1} = \ker \operatorname{Alt}_{34}\Big|_{\operatorname{Sym}^3 V \otimes V}$, а $V_{2,2}$ **– пространство тензоров, которые антисимметричны по перестановкам 1 и 2, а также 3 и 4 множителя, симметризованные по одновременным перестановкам 1 и 4, а также 2 и 3.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $V_{2,2}$ **есть ядро умножения** $V_{2,2} = \ker\left(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V) \to \Lambda^4 V\right)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $V_{2,2} \subset V \otimes V \otimes V \otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R_{ijk}^l \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда** $R_{ijkl} \in V_{2,2}$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl} \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$**.**

Симметрии тензора кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: (алгебраическое тождество Бьянки)
Пусть $\Theta_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ – кривизна связности Леви-Чивита. **Тогда**

$$\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla) := \Theta_\nabla(X,Y,Z,\cdot) + \Theta_\nabla(Y,Z,X,\cdot) + \Theta_\nabla(Z,X,Y,\cdot) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем X, Y, Z, которые коммутируют. Тогда $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, etc., потому что ∇ без кручения. Значит,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla(X,Y,Z))\\ &= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y) + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Y\nabla_X Y) + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X) = 0\end{aligned}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество открыл Риччи через несколько лет после того, как Бьянки доказал "дифференциальное тождество Бьянки"

СЛЕДСТВИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\operatorname{Cycl}_{1,2,3}\Big|_{\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M}$ на все остальные компоненты $V \otimes V \otimes V \otimes V$ зануляется. ■

Разложение Риччи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – вещественное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $\dim V > 4$, а $V_{2,2}$ – пространство алгебраических тензоров кривизны. Рассмотрим отображение следа $\operatorname{Tr}_{1,3}: V_{2,2} \to \operatorname{Sym}^2 V$. Оно обозначается Ric и называется **кривизной Риччи**, а его след называется **скалярной кривизной**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим $V_{2,2}$ как представление ортогональной группы $O(V)$. **Тогда $V_{2,2}$ имеет следующие неприводимые компоненты:**

$$V_{2,2} = W \oplus \operatorname{Sym}^2_0 V \oplus \mathbb{R},$$

где $W = \ker \operatorname{Ric}$, а $\operatorname{Sym}^2_0 V$ – симметрические формы с нулевым следом, причем $\operatorname{Sym}^2_0 V \oplus \mathbb{R} = \operatorname{Sym}^2 V$ вкладывается в $V_{2,2}$ как $\operatorname{Ric}^* \operatorname{Sym}^2 V \to V_{2,2}$.

Доказательство: Howe, Roger, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 539–570. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие, Θ его кривизна, а $\Theta = W + \operatorname{Ric}$ разложение тензора кривизны по компонентам $V_{2,2} = W \oplus \operatorname{Sym}^2 V$. Тензор W называется **тензором Вейля**, или **тензором конформной кривизны**, а $\operatorname{Ric} = \operatorname{Ric}(\Theta)$ – **кривизной Риччи** многообразия. След кривизны Риччи называется **скалярной кривизной**.

Словарь римановой геометрии

Римановы многообразия классифицируются в соответствии с их разложением кривизны: $\Theta = W + \mathrm{Ric}_0 + S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Риманово многообразие называется **конформно плоским**, если $W = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такие многообразия **конформно эквивалентны плоским**, то есть их метрика делается плоской после умножения на функцию; это нетривиальная теорема, доказанная Г. Вейлем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если бесследовая кривизна Риччи равна нулю, многообразие называется **Эйнштейновым**. Для такого многообразия, имеет место $\mathrm{Ric} = \lambda g$, где g это метрика, а λ – функция. В такой ситуации, **можно доказать, что функция λ постоянна.** Она называется **константой Эйнштейна**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $W = \mathrm{Ric}_0 = 0$, а $\Theta = S$, многообразие (M, g) называется **многообразием постоянной секционной кривизны** или **пространственной формой** (space form). **Такие многообразия локально изометричны римановой сфере, пространству Лобачевского, или $\mathbb{R}^n$.**