Векторные расслоения, лекция 7: тензор кривизны Римана

Миша Вербицкий

28 октября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

4 и 11 ноября лекции не будет!
4 ноября будет контрольная, 11 ноября будет прием задач.

Кривизна связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: \ B \to B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^1(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^2(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^3(M) \otimes B \stackrel{\nabla}{\to} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: \ B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

Тогда оператор $\Theta_B(X, Y)$ $C^\infty M$-линеен по всем трем аргументам, и удовлетворяет $\nabla^2(X, Y)(b) = \Theta_B(X, Y)$. ■

Ортогональная алгебра $\mathfrak{so}(V)$ (повторение)

ПРИМЕР: Пусть $h \in V^* \otimes V^*$ – скалярное произведение. **Ортогональная алгебра Ли** $\mathfrak{so}(V)$ есть множество всех эндоморфизмов $a \in \operatorname{End} V$, которые удовлетворяют $a(h) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Докажите, что $\mathfrak{so}(V) = \{a \in \operatorname{End} V \;\; | \;\; h(a\cdot, \cdot) = -h(\cdot, a\cdot)\}$, другими словами, **$\mathfrak{so}(V)$ – алгебра Ли кососимметрических матриц.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть h невырожденно. **Тогда $\mathfrak{so}(V) = \Lambda^2 V^*$.**

Доказательство. Шаг 1: Отождествим $\operatorname{End} V = V \otimes V^*$ с $V \otimes V$, пользуясь изоморфизмом $V = V^*$, который получен из h по формуле: $v \xrightarrow{\xi} h(v, \cdot)$.

Шаг 2: Кососимметрический оператор $a \in \mathfrak{so}(V) \subset V \otimes V^*$ удовлетворяет

$$\xi \otimes \operatorname{Id}(a)(x, y) = h(a(x), y) = -h(x, a(y)), \qquad (1)$$

значит, 2-форма $\xi \otimes \operatorname{Id}(a) \in V^* \otimes V^*$ кососимметрична.

Шаг 3: Наоборот, из каждой кососимметричной формы $\omega \in \Lambda^2 V^*$ можно получить матрицу $a = (\xi \otimes \operatorname{Id})^{-1}(\omega)$, и она будет кососимметрична в силу (1). ■

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие M называется **римановым**, если на TM задано невырожденное, положительно определенное скалярное произведение g.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Тензор римановой кривизны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тензор римановой кривизны** есть тензор кривизны связности Леви-Чивита.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $\Lambda^2 M \otimes (\mathfrak{so}(TM))$, то есть он берет три векторных поля, и выдает одно. Такой тензор кривизны удобно обозначать $R^l_{ijk} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M \otimes TM$. Если же отождествить $\mathfrak{TM}$ с $\Lambda^2 M$, мы получим **4-форму** $R^{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$, которая **тоже называется тензор римановой кривизны.**

Сегодня мы будем изучать симметрии тензора римановой кривизны.

Представления групп

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – конечномерное векторное пространство, $G \xrightarrow{\rho} \operatorname{End}(V)$ – представление группы. Оно называется **простым**, если у V нет нетривиальных G-инвариантных подпространств $V_1 \subset V$, и **полупростым**, если V – прямая сумма простых представлений.

ПРИМЕР: **Если ρ унитарное представление, оно полупросто**. Действительно, ортогональное дополнение $V_1^\perp$ G-инвариантного пространства тоже G-инвариантно.

ПРИМЕР: **Если G редуктивная группа Ли, все ее представления полупросты**. Это одно из определений редуктивной группы.

ПРИМЕР: **Если G – конечная группа, все ее представления полупросты**. Возьмем положительно-определенное скалярное произведение h на V, и пусть

$$h_G(x,y) := \sum_{g\in G} \xi(gx, xy).$$

Скалярное произведение h_G G-инвариантно и положительно определено, а значит, V полупросто.

Групповая алгебра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Групповая алгебра конечной группы есть векторное пространство $\mathbb{C}[G]$ с базисом $\{g_1, ...g_n\} = G$, и умножением g_i определенным как в G. **Рассмотрим $[G]$ как представление G, где G действует слева.**

ТЕОРЕМА: Пусть V – неприводимое представление G. **Тогда V реализуется как одно из прямых слагаемых в $\mathbb{C}[G]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $v \in V$, и рассмотрим отображение $\rho : \mathbb{C}[G] \to V$, переводящее вектор $g \in G$ из базиса в $g(v)$. Это ненулевое отображение; **двойственное к нему отображение определяет вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}[G]$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Существует не более чем конечное число попарно неизоморфных представлений конечной группы G.

Теорема Фробениуса: Число попарно неизоморфных представлений симметрической группы равно числу классов сопряженности G.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите эту теорему.

Идемпотенты в групповой алгебре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Элемент $a \in A$ алгебры называется **идемпотентом**, если $a^2 = a$.

Зафиксируем G-инвариантную положительно-определенную эрмитову форму на $\mathbb{C}[G]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $V \subset \mathbb{C}[G]$ – подпредставление, а $\iota : \mathbb{C}[G] \to V$ – ортогональная (как следствие, V-инвариантная) проекция. Тогда $\iota^2 = \iota$, то есть ι – идемпотент.

ТЕОРЕМА: Идемпотенты в групповой алгебра биективно соответствуют подпредставлениям $V \subset \mathbb{C}[G]$.

Докательство будет.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим пространство $\mathbb{C}[G]$ как представление G с левым действием группы G на себе: $L_g(g') = gg'$. Алгебра $\mathbb{C}[G]$ действует на себе справа, по формуле $R_g(g') = g'g^{-1}$. **Эти два действия коммутируют**.

Идемпотенты в групповой алгебре (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пространство $\operatorname{End}_G(\mathbb{C}[G])$ G-инвариантных эндоморфизмов $\mathbb{C}[G]$ (относительно левого действия G) **отождествляется с $\mathbb{C}[G]$, действующим справа.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку G действует транзитивно на элементах базиса, $\psi \in \operatorname{End}_G(\mathbb{C}[G])$ однозначно задается вектором $\psi(e)$. Пространство таких образов это как раз $\mathbb{C}[G]$. ■

СЛЕДСТВИЕ: **Существует каноническая биекция между множеством идемпотентов в $\mathbb{C}[G]$ и подпредставлениями $V \subset \mathbb{C}[G]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Собственные значения идемпотента равны 0,1, то есть это всегда проекция на G-инвариантное подпространство. Наоборот, каждое G-инвариантное подпространство получается из G-инвариантной проекции. ■

Диаграммы Юнга

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Каждая партиция множества из n элементов соответствует картинке, которая называется **диаграмма Юнга**

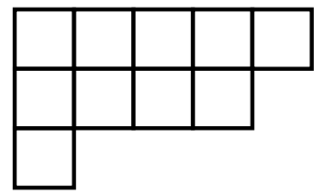

Диаграмма Юнга, соответствующая партиции числа 10.

ЗАМЕЧАНИЕ: Диаграммы Юнга биективно соответствуют классам сопряженности в симметрическох группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Таблица Юнга** получается из диаграммы Юнга размещением чисел от 1 до n в клеточки таблицы.

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

Таблица Юнга, соответствующая партиции числа 10.

Симметризаторы Юнга

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для подгруппы $G \subset S_n$ симметрической группы, рассмотрим идемпотент $s_G \in C[S_n]$, который называется **симметризатором**

$$s_G(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(v)$$

и другой идемпотент, который называется **антисимметризатором**

$$a_G(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} sign(g) g(v)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S_n – симметрическая группа, а σ – таблица Юнга. **Симметризатор Юнга** есть идемпотент $s_\sigma \in \mathbb{Q}[S_n]$, построенный по σ следующим образом. Рассмотрим группы P и $Q \subset S_n$, где P – множество перестановок, сохраняющих строки, а Q – множество перестановок, сохраняющих столбцы таблицы. Тогда $s_\sigma := s_P a_Q$.

Модули Шпехта

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть s_σ – симметризатор Юнга. $\mathbb{Q}[S_n]$-модуль $V_\sigma := \mathbb{Q}[S_n] \cdot s_\sigma$ называется **модулем Шпехта**.

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте, что $c_\sigma^2 = \lambda c_\sigma^2$, где $\lambda = \frac{n!}{|P||Q| \operatorname{dim} V_\sigma}$.**

ТЕОРЕМА: Каждое неприводимое представление симметрической группы изоморфно модулю Шпехта. Более того, **классы изоморфизма представлений симметрической группы находятся в биективном соответствии с диаграммами Юнга**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это утверждение сразу следует из теоремы Фробениуса. Действительно, **классы сопраженности в S_n биективно соответствуют партициям множества из n элементов.**

4 и 11 ноября лекции не будет!
4 ноября будет контрольная, 11 ноября будет прием задач.

Представления $GL(n)$

ТЕОРЕМА: Пусть V – векторное пространство, а $V^{\otimes n}$ – его тензорная степень. **Пространство $V^{\otimes n}$ есть прямая сумма неприводимых представлений $GL(V)$, параметризованных диаграммами Юнга**. Для каждой таблицы Юнга, и соответствующего симметризатора s_σ, образ $c_\sigma(V^{\otimes n})$ неприводим. **Разложение $V^{\otimes n}$ по неприводимым компонентам относительно действия симметрической группы совпадает с разложением по неприводимым компонентам относительно действия $GL(V)$.**

ПРИМЕР: $V\otimes V = \Lambda^2 V\oplus \operatorname{Sym}^2 V$.

ПРИМЕР: $V\otimes V\otimes V = \Lambda^3 V\oplus \operatorname{Sym}^3 V\oplus C(V)$, где $C(V)$ есть **пространство тензоров Картана**, которое может быть отождествлено с ядром $\operatorname{Sym}_{23}\Big|_{\operatorname{Sym}^2 V\otimes V}$.

ПРИМЕР: $V\otimes V\otimes V\otimes V = \Lambda^4 V\oplus \operatorname{Sym}^4 V\oplus (V_{3,1})^{\oplus 4}\oplus V_{2,1,1}^{\oplus 4}\oplus V_{2,2}^{\oplus 6}$. Здесь $V_{3,1}=\ker \operatorname{Alt}_{34}\Big|_{\Lambda^3 V\otimes V}$, $V_{2,1,1}=\ker \operatorname{Sym}_{34}\Big|_{\operatorname{Sym}^3 V\otimes V}$, а $V_{2,2}$ – ядро отображения из $\Lambda^2 V\otimes\Lambda^2 V$, симметризующего по одновременным перестановкам 1 и 3 и 2 и 4 векторов.

Симметрии пространства $V_{2,2}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $V_{2,2}$ – ядро отображения из $\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V$, симметризующего по одновременным перестановкам 1 и 3 и 2 и 4 векторов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $V_{2,2}$ **есть ядро умножения в алгебре Грассмана:** $V_{2,2} = \ker\left(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V) \to \Lambda^4 V\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\Lambda^4 V$ – прямая сумма неприводимых компонент действия S_4, а $V_{2,2}$ – прямая сумма неизоморфных им неприводимых компонент. С другой стороны, в $\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)$ нет других неприводимых компонент действия S_4, что ясно из описания всех неприводимых представлений S_4 в терминах симметризаторов. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: $V_{2,2}$ **есть ядро симметризации по циклическим перестановкам:** $V_{2,2} = \ker \operatorname{Cycl}_{1,2,3}\Big|_{\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\operatorname{Cycl}_{1,2,3}\Big|_{\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V}$ на все остальные неприводимые компоненты действия S_4 на $V \otimes V \otimes V \otimes V$ зануляется. ■

Пространство алгебраических тензоров кривизны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $V_{2,2} \subset V \otimes V \otimes V \otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R^l_{ijk} \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда $R_{ijkl} \in V_{2,2}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl} \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$.**

Симметрии тензора кривизны

УТВЕРЖДЕНИЕ: (алгебраическое тождество Бьянки) Пусть $\Theta_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$ – кривизна связности Леви-Чивита. **Тогда**

$$\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla) := \Theta_\nabla(X,Y,Z,\cdot) + \Theta_\nabla(Y,Z,X,\cdot) + \Theta_\nabla(Z,X,Y,\cdot) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем X, Y, Z, которые коммутируют. Тогда $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, etc., потому что ∇ без кручения. Значит,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cycl}_{1,2,3}(\Theta_\nabla(X,Y,Z)) \\ &= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y) + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Y\nabla_X Y) + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X) = 0 \end{aligned}$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тождество открыл Риччи через несколько лет после того, как Бьянки доказал "дифференциальное тождество Бьянки"

СЛЕДСТВИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $V_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проекция ядра $\operatorname{Cycl}_{1,2,3}\Big|_{\Lambda^2 M\otimes\Lambda^2 M}$ на все остальные компоненты $V\otimes V\otimes V\otimes V$ зануляется. ■

Разложение Риччи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – вещественное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $\dim V > 4$, а $V_{2,2}$ – пространство алгебраических тензоров кривизны. Рассмотрим отображение следа $\mathsf{Tr}_{1,3}: V_{2,2} \to \mathsf{Sym}^2 V$. Оно обозначается Ric и называется **кривизной Риччи**, а его след называется **скалярной кривизной**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим $V_{2,2}$ как представление ортогональной группы $O(V)$. **Тогда $V_{2,2}$ имеет следующие неприводимые компоненты:**

$$V_{2,2} = W \oplus \mathsf{Sym}_0^2 V \oplus \mathbb{R},$$

где $W = \ker \mathsf{Ric}$, а $\mathsf{Sym}_0^2 V$ – симметрические формы с нулевым следом, причем $\mathsf{Sym}_0^2 V \oplus \mathbb{R} = \mathsf{Sym}^2 V$ вкладывается в $V_{2,2}$ как $\mathsf{Ric}^* \ \mathsf{Sym}^2 V \to V_{2,2}$.

Доказательство: Howe, Roger, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 539–570. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие, Θ его кривизна, а $\Theta = W + \mathsf{Ric}$ разложение тензора кривизны по компонентам $V_{2,2} = W \oplus \mathsf{Sym}^2 V$. Тензор W называется **тензором Вейля**, или **тензором конформной кривизны**, а $\mathsf{Ric} = \mathsf{Ric}(\Theta)$ – **кривизной Риччи** многообразия. След кривизны Риччи называется **скалярной кривизной**.

Словарь римановой геометрии

Римановы многообразия классифицируются в соответствии с их разложением кривизны: $\Theta = W + \mathrm{Ric}_0 + S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Риманово многообразие называется **конформно плоским**, если $W = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такие многообразия **конформно эквивалентны плоским**, то есть их метрика делается плоской после умножения на функцию; это нетривиальная теорема, доказанная Г. Вейлем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если бесследовая кривизна Риччи равна нулю, многообразие называется **эйнштейновым**. Для такого многообразия, имеет место $\mathrm{Ric} = \lambda g$, где g это метрика, а λ – функция. В такой ситуации, **можно доказать, что функция λ постоянна.** Она называется **константой Эйнштейна**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $W = \mathrm{Ric}_0 = 0$, а $\Theta = S$, многообразие (M, g) называется **многообразием постоянной секционной кривизны** или **пространственной формой** (space form). **Такие многообразия локально изометричны римановой сфере, пространству Лобачевского, или $\mathbb{R}^n$.**