Векторные расслоения, лекция 8: группа голономий

Миша Вербицкий

18 ноября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Кривизна связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: \ B \to B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: \ B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X,Y]} b$$

Тогда оператор $\Theta_B(X, Y)$ $C^\infty M$-линеен по всем трем аргументам, и удовлетворяет $\nabla^2(X, Y)(b) = \Theta_B(X, Y)$. ■

Связность Леви-Чивита (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие M называется **римановым**, если на TM задано невырожденное, положительно определенное скалярное произведение g.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Тензор римановой кривизны (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тензор римановой кривизны** есть тензор кривизны связности Леви-Чивита.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $\Lambda^2 M \otimes (\mathfrak{so}(TM))$, то есть он берет три векторных поля, и выдает одно. Такой тензор кривизны удобно обозначать $R^l_{ijk} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M \otimes TM$. Если же отождествить $\mathfrak{TM}$ с $\Lambda^2 M$, мы получим **4-форму** $R^{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$**,** которая **тоже называется тензор римановой кривизны.**

Пространство алгебраических тензоров кривизны (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V_{2,2} \subset \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$ обозначает ядро умножения $\mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V) \to \Lambda^4 V$. Пространство $V_{2,2} \subset V \otimes V \otimes V \otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R^l_{ijk} \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда $R_{ijkl} \in V_{2,2}$.**

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична: $R_{ijkl} \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$.

Симметрические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симметрическое пространство** есть риманово многообразие M, снабженное набором изометрий i_x, для любой точки $x \in M$. При этом i_x сохраняет x, в квадрате дает тождественное преобразование, а на T_xM действует как -1. **Локально симметрическое пространство** есть пространство, которое локально изометрично симметрическому.

ТЕОРЕМА: Риманово многообразие (M,g) **локально симметрическое тогда и только тогда, когда $\nabla R = 0$,** где R – тензор римановой кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть (M,g) локально симметрическое. Тензор ∇R инвариантен относительно изометрий, значит, $i_x^*(\nabla R) = \nabla R$. На нечетных тензорах i_x действует как -1:

$$\left(\nabla R\Big|_x\right) = i_x^* \left(\nabla R\Big|_x\right) = -\left(\nabla R\Big|_x\right),$$

значит, $\nabla R\Big|_x = 0$, для каждой точки $x \in M$.

Импликацию $\nabla R \Rightarrow$ (M локально симметрическое) я доказывать не буду, но в любом нормальном курсе римановой геометрии ее доказывают (нужны геодезические, экспоненциальное отображение, поля Якоби). ■

Распределения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение на гладком многообразии есть гладкое подрасслоение $B \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Pi : TM \to TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно,. $\Pi([x, y])$ **зависит от** x, y $C^\infty(M)$**-линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \to TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$-линейная 2-форма на B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение называется **интегрируемым**, **голономным** или же **инволютивным**, если форма Фробениуса равна нулю.

Гладкие субмерсии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi : M \to M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюрьективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi : M \to M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что $\pi\big|_U$ **есть проекция на W.**

Доказательство: Теорема о неявной функции.

УПРАЖНЕНИЕ: ("Ehresmann's fibration theorem")
Пусть $\pi : M \to M'$ – гладкая субмерсия компактных многообразий. **Докажите, что это локально тривиальное расслоение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** субмерсии есть ядро $D\pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это инволютивное подрасслоение.**

Доказательство: Коммутатор перестановочен с проекцией потому что.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вертикальное подрасслоение обозначается $T_\pi M$.

Теорема Фробениуса (формулировка)

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ такая, что B есть вертикальное касательное подрасслоение:** $B = T_\pi M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Слои π называются **листами**, или **интегральными подмногообразиями** распределения B. Распределение, для которого верна теорема Фробениуса, называетсы **интегрируемым**. Если B интегрируемо, совокупность всех листов (а также само B) называют **слоением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства теоремы Фробениуса **достаточно убедиться, что через каждую точку проходит интегральное подмногообразие.** В этом случае, гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ – это проекция на пространство листов слоения.

Базовые подрасслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B \subset TM$ – инволютивное подрасслоение, Подрасслоение $F \subset TM$ называется **базовым** для B, если $F \supset B$ и для любого $b \in B, b' \in F$, имеем $[b, b'] \in F$.

ЛЕММА: Пусть $B \subset TM$ – интегрируемое слоение, $\pi : M \to M_1$ – проекция на пространство листов B, а $F \supset B$ – подрасслоение TM, содержащее B. Тогда следующие условия равносильны. **(а) F – базовое для B. (б) Существует подрасслоение $F_1 \subset TM_1$ такое, что $\pi^{-1}F_1 = F$.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим координаты $x_1, ..., x_n$ на M такие, что $x_{k+1}, ..., x_n$ задают координаты на M_1, а $d/dx_1, ..., d/dx_k$ порождают B. Обозначим за G подгруппу в группе диффеоморфизмов $\operatorname{Diff}(M)$, которая порождена экспонентами векторных полей $d/dx_1, ..., d/dx_k$. Поскольку $[b, b'] \subset F$, $e^b(F) \subset F$, значит, F – G-инвариантное подрасслоение.

Шаг 2: Любое G-инвариантное подрасслоение $F \supset B$ поднимается с фактора $M/G = M_1$. Действительно, поскольку действие G свободно, расслоение F порождено над $C^\infty M$ G-инвариантными сечениями, но каждое G-инвариантное векторное поле поднимается с M_1.

Шаг 3: Наоборот, если F поднимается с M_1, оно G-инвариантно, но это значит, что $\operatorname{Lie}_b(b') \subset F$. ■

Теорема Фробениуса (доказательство)

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \stackrel{\pi}{\to} V$ такая, что B есть вертикальное касательное подрасслоение:** $B = T_\pi M$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем одномерное подрасслоение $B_1 \subset B$. По теореме о существовании решений ОДУ, B_1 интегрируемо. Поскольку $[B_1, B] \subset B$, расслоение B базовое относительно B_1, **значит, поднимается с пространства листов B_1.**

Шаг 2: Обозначим проекцию за $\pi : \ M \to M_1$. Тогда $B = \pi^* B_0$, для $B_0 \subset TM$ ранга $\operatorname{rk} B - 1$. Воспользовавшись индукцией, можно считать, что B_0 интегрируемо. Пусть $\pi_0 : \ M_1 \to M_0$ – проекция на пространство листов B_0. **Тогда $\pi \circ \pi_0 : \ M \to M_0$ – проекция на пространство листов B.** ■

Группа голономий (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1923) Пусть (M, ∇) – расслоение со связностью над M. Для каждой петли γ, идущей из x в $x \in M$, обозначим за $V_{\gamma,\nabla} : B\Big|_x \to B\Big|_x$ соответствующее отображение параллельного переноса вдоль связности. **Группа голономий** (B, ∇) есть подгруппа $GL(T_xM)$, порожденная $V_{\gamma,\nabla}$, для всех петель γ. Группа **локальных голономий** есть подгруппа $GL(T_xM)$, порожденная $V_{\gamma,\nabla}$ для стягиваемых петель.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расслоение **плоско** (имееет нулевую кривизну) тогда и только тогда, когда его локальная голономия тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\nabla(\varphi) = 0$ для тензора $\varphi \in B^{\otimes i} \otimes (B^*)^{\otimes j}$, то **группа голономий ∇ сохраняет φ.**

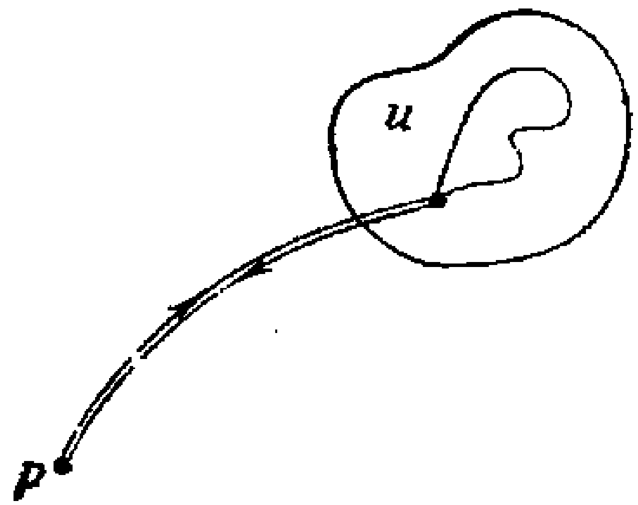
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голономия риманова многообразия** есть голономия его связности Леви-Чивита.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **группа голономий не зависит от выбора точки $x \in M$.**

ЗАДАЧА: Пусть G – группа Ли, g – биинвариантная метрика. Докажите, что **голономия (G, g) равна образу группы G** в $\operatorname{End}(T_eG)$, действующей T_eG как на присоединенном представлении.

Лемма о лассо

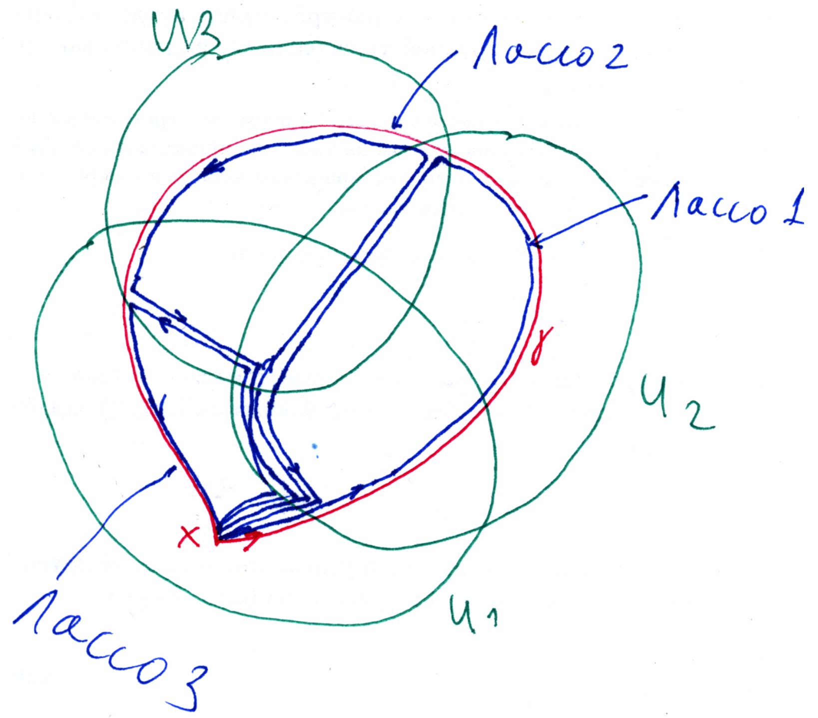
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Лассо** есть петля следующего вида:



Круглая часть называется **рабочей частью** лассо.

Лемма о лассо (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: ("Лемма о лассо") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие многообразия, а γ – стягиваемая петля. Тогда γ **можно разложить в произведение нескольких лассо, с рабочей частью каждого из лассо в** U_i**.**



Теорема Амброза-Зингера

ЗАМЕЧАНИЕ: Из утверждения 1 и теоремы о непрерывности голономии как функции контура (лекция 6) легко вывести следующее. Зафиксируем $C > 0$. Рассмотрим лассо с рабочей областью площади ε^2 и периметра $C\varepsilon$, затянутой 2-мерной поверхностью, касательные пространства к которой с точностью до $C\varepsilon^2$ равны 2-мерной плоскости $V = \langle x, y\rangle$ Пусть x, y – ортонормальный базис в V. **Тогда голономия вдоль лассо с точностью до $o(\varepsilon^2)$ равна $\varepsilon^3\gamma^* R(x, y)$, где γ^* есть оператор голономии вдоль нерабочей части лассо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – расслоение со связностью, $\Theta \in \Lambda^2(M)\otimes \operatorname{End}(B)$ – его кривизна, а $a, b \in T_xM$ – касательные векторы. Эндоморфизм $\Theta(a, b) \in \operatorname{End}(B)\Big|_x$ называется **элементом кривизны**.

ТЕОРЕМА: (Аброз-Сингер) Локальная группа голономий B, ∇ в $z \in M$ есть группа Ли **с алгеброй Ли, порожденной всеми элементами кривизны $\Theta(a, b) \in \operatorname{End}(B)\Big|_x$ перенесенными в z параллельным переносом вдоль всех путей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Доказательство этой теоремы следует из леммы о лассо и вышеприведенного замечания. ■

Представление голономии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, g) - риманово многообразие, а G его группа голономий. **Представление голономии** в $x \in M$ есть действие G на T_xM.

ТЕОРЕМА: (де Рама) Предположим, что представление голономий приводимо: $T_xM = B_1 \oplus B_2$. **Тогда риманово многообразие M локально расщепляется в произведение: $M = M_1 \times M_2$, где $B_1 = T_xM_1$, $B_2 = T_xM_2$.**

Доказательство. Шаг 1: Используя параллельный перенос относительно связности, продолжим разложение $B_1 \oplus B_2$ до **расщепления касательного расслоения в ортогональную прямую сумму $TM = B_1 \oplus B_2$, совместимую с голономией и связностью.**

Шаг 2: Подрасслоения B_1, $B_2 \subset TM$ **инволютивны:** $[B_1, B_1] \subset B_i$ (связность Леви-Чивита не имеет кручения).

Шаг 3: Применяя теорему Фробениуса, получим, что эти расслоения – касательные к листам дополнительных слоений на M. Это дает **локальное разложеное $M = M_1 \times M_2$, с $B_1 = TM_1$, $B_2 = TM_2$.**

Представление голономии (продолжение)

ТЕОРЕМА: (де Рама) Предположим, что представление голономий приводимо: $T_xM = B_1 \oplus B_2$. **Тогда риманово многообразие M локально расщепляется в произведение: $M = M_1 \times M_2$, где $B_1 = T_xM_1$, $B_2 = T_xM_2$.**

Доказательство. Шаг 1: Продолжим разложение $B_1 \oplus B_2$ до **расщепления касательного расслоения в ортогональную прямую сумму $TM = B_1 \oplus B_2$, совместимую с голономией и связностью.**

Шаг 2: Подрасслоения B_1, $B_2 \subset TM$ **инволютивны:** $[B_1, B_1] \subset B_i$ (связность Леви-Чивита не имеет кручения).

Шаг 3: Применяя теорему Фробениуса, получим, что эти расслоения – касательные к листам дополнительных слоений на M. Это дает **локальное разложеное $M = M_1 \times M_2$, с $B_1 = TM_1$, $B_2 = TM_2$.**

Шаг 4: Поскольку разложение $TM = B_1 \oplus B_2$ совместимо со связностью, **все листы M_1, M_2 вполне геодезические.**

Шаг 5: Следовательно, **локально M расщепляется (как метрическое пространство)**: $M = M_1 \times M_2$, где M_1, M_2 – какие-то листы этих слоений. ■

Теорема де Рама о разложении

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие, а

$$\operatorname{Hol}_0(M) \stackrel{\rho}{\to} \operatorname{End}(T_xM)$$

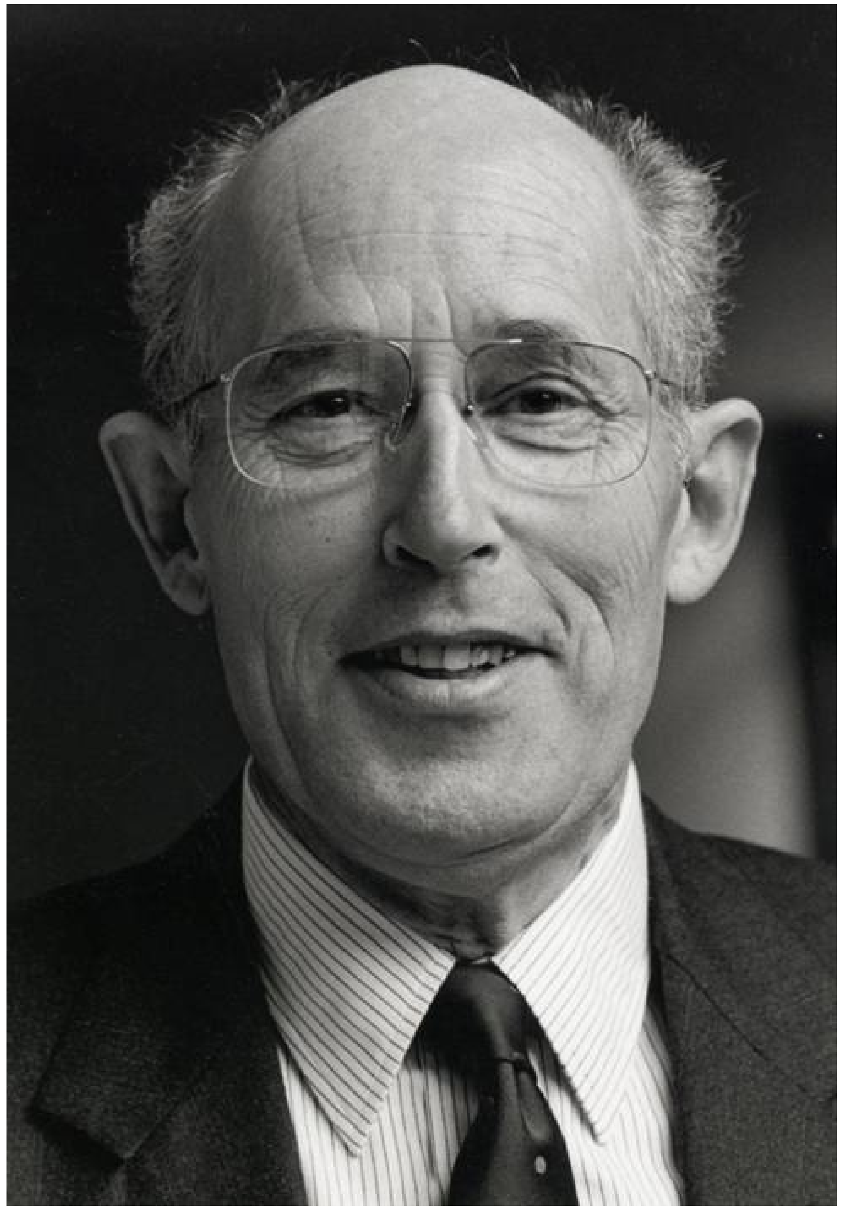
– локальное представление голономий. Предположим, что ρ приводимо: $T_xM = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$. **Тогда группа $G = \operatorname{Hol}_0(M)$ тоже расщепляется в произведение: $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_k$,** где каждая из G_i тривиально действует на всех V_j с $j \neq i$.

Доказательство: Локально, эта теорема следует из локального разложения M, доказанного выше. Чтобы получить его глобально по M, используем лемму о лассо. ■

ТЕОРЕМА: (де Рама) Полное, односвязное риманово многообразие с приводимой голономией **расщепляется в произведение римановых многообразий**.

УПРАЖНЕНИЕ: Найдите неполные и неодносвязные контрпримеры к утверждению этой теоремы.

ТЕОРЕМА: (Саймонс, 1962) Пусть M – многообразие с неприводимой голономией. Тогда **либо M локально симметрично, либо $\operatorname{Hol}(M)$ действует транзитивно на единичной сфере в T_xM.**



Marcel Berger

Теорема Берже

ТЕОРЕМА: (теорема Берже, 1955) Пусть G – неприводимая группа голономий риманова многообразия, которое не локально симметрично. Тогда G принадлежит списку Берже:

Список Берже	
Голономия	*Геометрия*
$SO(n)$ действующее на $\mathbb{R}^n$	риманово многообразие
$U(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$	кэлерово многообразие
$SU(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 2$	многообразие Калаби-Яу
$Sp(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$	гиперкэлерово многообразие
$Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm 1\}$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$, $n > 1$	кватернионно-кэлерово многообразие
G_2 действующее на $\mathbb{R}^7$	G_2-многообразие
$Spin(7)$ действующее на $\mathbb{R}^8$	$Spin(7)$-многообразие

ЗАМЕЧАНИЕ: Существует еще одна группа, транзитивно действующая не сфере: $Spin(9)$, действующая на $\mathbb{R}^{16}$. В 1968, Д. В. Алексеевский доказал, что **любое многообразие с голономией** Spin(9) **локально симметрично.**