Векторные расслоения, лекция 9: главные расслоения

Миша Вербицкий

25 ноября, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Топология фактора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа. Действие $G \times M$ на топологическом пространстве **непрерывно**, если отображение $G \times M \to M$ непрерывно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается $M/\sim$. На $M/\sim$ вводится **топология фактора**: открытые подмножества $M/\sim$ - такие подмножества, прообраз которых в M открыт. Если на M действует группа G, возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$ если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством M по действию G**, и обозначается M/G.

Главные G-расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции задаются гладкими отображениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – топологическое пространство, снабженное свободным, непрерывным действием группы Ли G, а факторпространство M/G с топологией фактора хаусдорфово. В такой ситуации проекция $M \to M/G$ называется **главным G-расслоением**. Если на M и на M/G заданы согласованные структуры гладкого многообразия, а действие $G \times M \to M$ гладко, главное G-расслоение называется **гладким**.

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, все G-расслоения будут по умолчанию **предполагаться гладкими.**

Тривиализация главных G-расслоений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиальное гладкое расслоение** есть гладкое отображение вида $N \times U \to U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гладкая субмерсия $M \xrightarrow{\varphi} N$ называется **локально тривиальным гладким расслоением**, если у каждой точки N найдется такая окрестность U, что проекция $\varphi^{-1}(U) \to U$ является тривиальным гладким расслоением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиализация** главного G-расслоения $M \xrightarrow{\pi} N = M/G$ есть выбор сечения π, то есть такого отображения $N \xrightarrow{s} M$, что $s \circ \pi = \mathrm{Id}_N$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $M \xrightarrow{\pi} N = M/G$ – главное G-расслоение, а $s : N \to M$ – его сечение, **каждая точка M однозначно записывается как $gs(n)$,** где $n \in N$, а $g \in G$. Поэтому M тривиально: $M = N \times G$.

Тривиализация главных G-расслоений (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Гладкие главные G-расслоения локально тривиальны**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $M \stackrel{\pi}{\to} M/G$ – главное G-расслоение, $z \in M$ точка, а $Z \subset M$ - гладкое подмногообразие, содержащее z, размерности $\dim M/G$. **Локально, можно выбрать Z таким образом, что касательная плоскость $T_z Z \subset T_z M$ будет какая угодно.**

Выберем Z таким образом, что $D\pi: \ T_z Z \to T_{\pi(z)} N$ – изоморфизм. Тогда $\pi: \ Z \to N$ задает диффеоморфизм в окрестности z, по теореме об обратной функции. **Обратное отображение есть сечение π.** ■

Главные G-расслоения: примеры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение Хопфа** $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ есть ограничение тавтологического отображения $\mathbb{C}^n \backslash 0 \to \mathbb{C}P^{n-1}$ на $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \backslash 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Также **расслоением Хопфа** $S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ называют ограничение тавтологического отображения $\mathbb{H}^n \backslash 0 \to \mathbb{H}P^{n-1}$ на $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n \backslash 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Первые два расслоения Хопфа получаются как факторы по группе $S^1 = U(1)$, действующей свободно на сфере, последнее - как фактор по группе $SU(2) = S^3$ унитарных кватернионов, которая тоже свободно действует. Поэтому **эти расслоения Хопфа суть главные расслоения**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Расслоение Хопфа нетривиально**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Действительно, $S^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ неодносвязно, а сфера односвязна, значит, $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ нетривиально; также, $H^3(S^{4n-1}) = 0$, а $H^3(S^3 \times \mathbb{H}P^{n-1}) \neq 0$ по формуле Кюннета, значит, $S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ тоже нетривиально. ■

Главные G-расслоения и 1-коциклы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, M – многообразие, а $\{U_i\}$ его покрытие. **1-коцикл** со значениями в G есть набор гладких функций $U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_{ij}} G$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ 2. $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два 1-коцикла φ_{ij} и ψ'_{ij} называются **кограничними**, если задан набор гладких отображений $\psi_i : U_i \to G$, причем $\varphi'_{ij} = \psi_i^{-1}\varphi_{ij}\psi_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли. Множество $H^1(M,G)$ **неабелевых когомологий с коэффициентами в G** есть множество 1-коциклов с коэффициентами в G с точностью до кограничности и до измельчения покрытия $\{U_i\}$.

Главные G-расслоения и когомологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два главных G-расслоения $E \to M$ и $E' \to M$ **эквивалентны**, если существует диффеоморфизм $E \to E'$ совместимый с проекцией на M и с действием G.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для главного G-расслоения $\pi : E \to M$, рассмотрим покрытие $\{U_i\}$, такое, что ограничение $\pi^{-1}(U_i) \to U_i$ расслоение на U_i тривиально. Для каждой пары U_i, U_j, пусть s_i, s_j – сечения ограничений, задающие тривиализацию, а $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ отображение, которое переводит точку $x \in U_i \cap U_j$ в элемент $g \in G$, который удовлетворяет $s_i(x) = gs_j(x)$ (такой элемент единственный, потому что G действует свободно). Тогда $\{\varphi_{ij}\}$ задает коцикл, а **построенное отображение из классов изоморфизма расслоений в $H^1(M,G)$ корректно определено, и задает биекцию между множеством классов эквивалентности G-расслоений и $H^1(M,G)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. лекцию 2. ■

Свойства неабелевых когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Точная последовательность отмеченных множеств** есть последовательность отображений таких, что образ i-го есть прообраз отмеченной точки в $(i+1)$-м.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ – точная последовательность групп. **Тогда имеет место точная последовательность**

$$0 \to H^1(M, G_1) \to H^1(M, G_2) \to H^1(M, G_3).$$

Если же G_1 ко всему прочему абелева, **ее можно продолжить:**

$$0 \to H^1(M, G_1) \to H^1(M, G_2) \to H^1(M, G_3) \to H^2(M, G_1).$$

здесь $H^2(M, G_1)$ – обычные когомологии Чеха, заданные гладкими 2-коциклами с точностью до гладких 2-кограниц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: То же, что и для точной последовательности обычных когомологий Чеха. ■

Экспоненциальная точная последовательность.

СЛЕДСТВИЕ: Экспоненциальная точная последовательность $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to C^* \to 0$ дает

$$0 = H^1(M, \mathbb{C}) \to H^1(M, \mathbb{C}^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{C}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $H^i(M, \mathbb{C})$ есть когомологии пучка гладких функций, они равны нулю. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Приведенная выше точная последовательность доказывает, что $H^1(M, \mathbb{C}^*)$ равно $H^2(M, \mathbb{Z})$, то есть **главные $\mathbb{C}^*$-расслоения классифицируются группой $H^2(M, \mathbb{Z})$.** Соответствующий класс в $H^2(M, \mathbb{Z})$ называется **первым классом Черна $\mathbb{C}^*$-расслоения**.

Расслоение реперов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над M. **Расслоение реперов** есть множество всех базисов в слоях B, снабженное естественной топологией.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Расслоение реперов есть главное $GL(n)$-расслоение. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над M, снабженное метрикой (то есть положительно определенной квадратичной формой). **Расслоение ортонормированных реперов** есть множество всех ортонормированных базисов в слоях B, снабженное естественной топологией.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Расслоение ортонормированных реперов есть главное $O(n)$-расслоение. ■

Расслоение реперов (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над M, снабженное невырожденной квадратичной формой сигнатуры (p,q). **Расслоение ортонормированных $O(p,q)$-реперов** есть множество всех базисов $e_1, ..., e_{p+q}$,

$$(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = ... = (e_p, e_p) = -(e_{p+1}, e_{p+1}) = ... = -(e_{p+q}, e_{p+q}) = 1$$

в слоях B, снабженное естественной топологией.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Расслоение ортонормированных $O(p,q)$-реперов есть главное $O(p,q)$-расслоение. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – комплексное векторное расслоение над M, снабженное положительно определенной эрмитовой формой. **Расслоение ортонормированных реперов** есть множество всех ортонормированных базисов в слоях B, снабженное естественной топологией.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Расслоение ортонормированных реперов в эрмитовом расслоении есть главное $U(n)$-расслоение. ■

Присоединенные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – топологические пространства с действием группы G. Определим $X \times_G Y$ как $X \times Y/G$ с топологией фактора, где g действует на $X \times Y$ "диагонально", то есть по формуле $g(x, y) = (gx, gy)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V – представление группы G, а E – главное G-расслоение над M. **Тогда аддитивная структура на V определяет структуру векторного расслоения над M на произведении $E \times_G V$.**
■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное расслоение $E \times_G V$ называется **присоединенным векторным расслоением**, или **ассоциированным векторным расслоением**, связанным с E и представлением V.

Векторные расслоения и главные расслоения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{R}^n$ – тавтологическое представление группы $G = GL(n,\mathbb{R})$, B – вещественное векторное расслоение над M, а $E \to M$ – расслоение реперов. **Тогда B изоморфно ассоциированному векторному расслоению $E \times_G V$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим отображение $E \times V \to B$ переводящее пару (базис $e_1, ..., e_n$ в B, вектор $(a_1, ..., a_n)$) в $\sum e_i a_i \in B$. **Поскольку это отображение G-инвариантно, оно продолжается на $E \times_G V \to B$.** Сюрьективность его очевидна по построению, инъективность – по соображениям размерности. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта теорема позволяет определить векторное расслоение как расслоение, ассоциированное с каким-то главным $G = GL(n,\mathbb{R})$-расслоением и тавтологическим представлением. В силу доказанного выше, **это определение векторного расслоения эквивалентно остальным** (у нас было еще два: через локально свободные пучки, и через тотальные пространства расслоения).

Редукция G-расслоений

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $E \to M$ – главное G_1-расслоение, а $G_1 \to G$ – гомоморфизм групп. **Тогда $E \times_{G_1} G$ есть главное G-расслоение.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Слои проекции $E \times_{G_1} G \to M$ изоморфны $G_1 \times_{G_1} G$, то есть парам (g_1, g) с точностью до действия G_1, Легко видеть, что $G_1 \times_{G_1} G = G$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G_1 \to G$ – гомоморфизм групп, а $E \to M$ – главное G-расслоение. **Редукция E к G_1** есть главное G_1-расслоение $E_1 \to M$ вместе с изоморфизмом главных G-расслоений $E \cong E_1 \times_{G_1} G$.

ПРИМЕР: Пусть $G_1 = \{e\}$ – тривиальная группа. Тогда **редукция E к G_1 есть изоморфизм $M \times_{\{} e\}G \cong E$,** то есть **тривиализация E.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $G_1 \to G$ – гомоморфизм групп, а
$\Psi : H^1(M, G_1) \to H^1(M, G)$ – соответствующее отображение. Тогда Ψ переводит коцикл, соответствующий G_1-расслоению E_1 в коцикл, соответствующий $E_1 \times_{G_1} G$. Поэтому G-расслоение E **редуцируется к G_1 тогда и только тогда, когда его класс когомологий лежит в образе Ψ.**

Структурная группа расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B = E \times_G V$ – векторное расслоение, которое получено из главного G-расслоения и представления V группы G. Тогда G называется **структурной группой расслоения** B.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над M со структурной группой G, E – соответствующее главное G-расслоение, $G_1 \to G$ – гомоморфизм групп, а $E_1 \to M$ – главное G_1-расслоение, которое получено редукцией E к G_1. **Тогда B ассоциировано с E_1 и представлением G_1, которое получено из гомоморфизма $G_1 \to G$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $B = E \times_G V = (E_1 \times_{G_1} G) \times_G V = E_1 \times_{G_1} V$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В такой ситуации говорится, что произведена **редукция структурной группы B к G_1.**

G-структура на многообразии

ПРИМЕР: Задание метрики на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(n,\mathbb{R})$ к $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$.

ПРИМЕР: Задание комплексной структуры на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(2n,\mathbb{R})$ к $GL(n,\mathbb{C}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$.

ПРИМЕР: Задание эрмитовой структуры на вещественном векторном расслоении равносильно редукции структурной группы $GL(2n,\mathbb{R})$ к $U(n) \subset GL(2n,\mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **G-структура** на многообразии M есть редукция структурной группы касательного расслоения TM к G, где G – группа Ли, снабженная гомоморфизмом $G \to GL(n)$.