

# Векторные расслоения, лекция 11: связности в главных $G$ -расслоениях

Миша Вербицкий  
9 декабря, 2013  
матфак ВШЭ и НМУ

## Главные $G$ -расслоения (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции задаются гладкими отображениями.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $M$  – топологическое пространство, снабженное свободным, непрерывным действием группы Ли  $G$ , а факторпространство  $M/G$  с топологией фактора хаусдорфово. В такой ситуации проекция  $M \rightarrow M/G$  называется **главным  $G$ -расслоением**. Если на  $M$  и на  $M/G$  заданы согласованные структуры гладкого многообразия, а действие  $G \times M \rightarrow M$  гладко, главное  $G$ -расслоение называется **гладким**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Тривиализация** главного  $G$ -расслоения  $M \xrightarrow{\pi} N = M/G$  есть выбор сечения  $\pi$ , то есть такого отображения  $N \xrightarrow{s} M$ , что  $s \circ \pi = \text{Id}_N$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ: Гладкие главные  $G$ -расслоения локально тривиальны.**

## Присоединенные расслоения (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства с действием группы  $G$ . Определим  $X \times_G Y$  как  $X \times Y/G$  с топологией фактора, где  $g$  действует на  $X \times Y$  "диагонально", то есть по формуле  $g(x, y) = (gx, gy)$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $V$  – представление группы  $G$ , а  $E$  – главное  $G$ -расслоение над  $M$ . Тогда аддитивная структура на  $V$  определяет структуру векторного расслоения над  $M$  на произведении  $E \times_G V$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Векторное расслоение  $E \times_G V$  называется **присоединенным векторным расслоением**, или **ассоциированным векторным расслоением**, связанным с  $E$  и представлением  $V$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $B = E \times_G V$  – векторное расслоение, которое получено из главного  $G$ -расслоения и представления  $V$  группы  $G$ . Тогда  $G$  называется **структурной группой расслоения  $B$** .

## Гладкие субмерсии (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\pi : M \rightarrow M'$  – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке  $M$  дифференциал  $D\pi$  сюръективен.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $\pi : M \rightarrow M'$  – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки  $m \in M$  есть окрестность  $U \cong V \times W$ , где  $U, W$  – гладкие многообразия, такая, что  $\pi|_U$  **есть проекция на  $W$** .

**Доказательство:** Теорема о неявной функции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Вертикальное касательное пространство**  $T_\pi M$  субмерсии  $\pi : M \rightarrow M'$  есть ядро  $D\pi$ .

## Связность Эресманна (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\pi : M \rightarrow N$  – гладкая субмерсия, а  $T_\pi M \subset TM$  – послойное ("вертикальное") касательное расслоение. **Связность Эресманна** есть подрасслоение  $B \subset TM$  такое, что  $T_\pi M \oplus B = TM$ . В такой ситуации,  $B$  называется **горизонтальное касательное расслоение** для субмерсии, и обозначается  $T_{\text{hor}}M$  или  $T_\nabla M$ , где  $\nabla$  обозначает связность Эресманна.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Проекция осуществляет изоморфизм слоев  $T_{\text{hor}}M|_x$  и  $T_{\pi(x)}N$ . Поэтому  $T_{\text{hor}}M = \pi^*TN$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $X \in TN$  – векторное поле. Соответствующее векторное поле  $\pi^*X \in \pi^*TM = T_{\text{hor}}M$  называется **горизонтальным подъемом  $X$  в  $T_{\text{hor}}M$** .

## 1-джеты сечений (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\pi : X \rightarrow Y$  – гладкая субмерсия, а  $s_1, s_2 : Y \rightarrow X$  – сечения  $\pi$ , которые проходят через точку  $x \in X$ . Говорится, что  $s_1$  и  $s_2$  **имеют одинаковый 1-джет в  $x$** , если  $T_x S_1 = T_x S_2$ , где  $S_1 = \text{ims}_1$  и  $S_2 = \text{ims}_2$ . Пространство классов эквивалентности обозначается  $J_x^1(X, \pi)$ , а объединение  $J_x^1(X)$  по всем  $x \in X$  называется **пространство 1-джетов сечений  $\pi$** , и обозначается  $J^1(X, \pi)$ . Мы рассматриваем на  $J^1(X, \pi)$  топологию, индуцированную  $C^1$ -топологией на пространстве сечений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $B$  – векторное расслоение над  $X$ , **Аффинное расслоение с линеаризацией  $B$**  есть гладкое расслоение  $E \rightarrow X$ , снабженное послойным действием  $B \times_X E \rightarrow E$ , перестановочным с проекцией на  $X$ , и индуцирующее изоморфизм между слоями  $B$  и слоями  $E$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Рассмотрим естественную проекцию  $\pi_1 : J^1(X, \pi) \rightarrow X$  из пространства 1-джетов сечений. Тогда  **$\pi_1$  есть аффинное расслоение с линеаризацией  $\text{Hom}(\pi^*TY, T_\pi X)$** .

## 1-джеты сечений и связности Эресманна (повторение)

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть  $T_{\text{hor}}X \subset TX$  – связность Эресманна на гладкой субмерсии  $\pi : X \rightarrow Y$ . Тогда для каждой точки  $x \in X$ , в какой-то окрестности  $U \ni \pi(x)$  существует сечение  $s : U \rightarrow X$ , содержащее  $x$ , и касательное к  $T_{\text{hor}}X$ ; очевидно, 1-джет такого сечения в  $x$  задается этим условием однозначно.

**ТЕОРЕМА:** Это задает биекцию между множеством связностей Эресманна и множеством сечений проекции  $\pi_1 : J^1(X, \pi) \rightarrow X$ . ■

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $\pi_1 : X_1 \rightarrow M, \pi_2 : X_2 \rightarrow M, \pi_3 : X_3 \rightarrow M$  – гладкие расслоения, а  $\Phi : X_1 \times_M X_2 \rightarrow X_3$  – морфизм гладких расслоений, то есть гладкое отображение, перестановочное с проекцией в  $M$ . Тогда  $\Phi$  индуцирует морфизм джет-расслоений  $J^1(\Phi) : J^1(X_1, \pi_1) \times J^1(X_2, \pi_2) \rightarrow J^1(X_3, \pi_3)$ . ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ (\*):** Пусть на  $\pi_i$  заданы связности  $\nabla^i$ , определяющие сечения  $s_i$  проекций  $J^1(X_i, \pi_i) \rightarrow X_i$ . Мы говорим, что отображение  $\Phi$  **совместимо со связностями**, если  $J^1(\Phi)(s_1 \times s_2) = s_3$ .

## Связности на расслоениях и 1-джеты (повторение)

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $B \xrightarrow{\pi} M$  – векторное расслоение со связностью  $\nabla$ . Тогда для каждой точки  $b \in \text{Tot } B$  в какой-то окрестности  $U \ni \pi(b)$  **существует сечение  $s : U \rightarrow \text{Tot } B$ , содержащее  $b$ , и удовлетворяющее  $\nabla s|_{\pi(b)} = 0$ .**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Воспользуемся формулой Лейбница:  $\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$ . Выбрав  $f = 0$  в  $m := \pi(b)$ , мы получим  $\nabla(f\xi)|_m = df \otimes \xi$ , что позволяет **решить уравнения  $\nabla(\sum f_i \xi_i)|_m = v, f_i(m) = 0$  для любого  $v \in \Lambda^1_m M \otimes B|_m$** . Теперь возьмем любое сечение  $\beta \in B$ , проходящее через  $b$ , решим уравнение  $\nabla(\sum f_i \xi_i)|_m = -\nabla\beta|_m$ , и возьмем  $s = \beta + \sum f_i \xi_i$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** 1-джет сечения  $s : U \rightarrow \text{Tot } B$ , удовлетворяющего  $\nabla s|_{\pi(b)} = 0$ , **задается однозначно**. Действительно, **если два джета сечений удовлетворяют этому уравнению, их производные в  $b$  равны**. Это задает сечение расслоения 1-джетов  $J^1(\text{Tot } B, \pi) \rightarrow \text{Tot } B$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $B \xrightarrow{\pi} M$  – векторное расслоение со связностью  $\nabla$ , а  $s : \text{Tot } B \rightarrow J^1(\text{Tot } B, \pi)$  – сечение расслоения 1-джетов, построенное выше. Соответствующая связность Эресманна называется **линейной**.



## Линейные связности

**Утверждение 1:** Пусть  $B$  – векторное расслоение над  $M$ ,  $\text{Tot } B$  – его тотальное пространство,  $\text{Tot } C^\infty M = \mathbb{R} \times M$  – тотальное пространство тривиального расслоения, снабженное тривиальной связностью, а  $\text{Tot } B \times \text{Tot } B \xrightarrow{\mu} \text{Tot } B$  и  $\text{Tot } C^\infty M \times \text{Tot } B \xrightarrow{v} \text{Tot } B$  – морфизмы гладких расслоений, заданные аддитивной структурой на  $B$  и умножением на функции. Рассмотрим связность Эресманна  $\nabla$  на  $\text{Tot } B \rightarrow M$ . **Тогда  $\nabla$  – линейная связность  $\Leftrightarrow$  отображения  $\mu$  и  $v$  совместимы со связностью в смысле определения (\*).**

**Доказательство. Шаг 1:** Линейная связность из связности на  $B$  построена выше; ее совместимость с  $\mu$  и  $v$  очевидна из конструкции.

**Шаг 2:** Чтобы построить обратное отображение, замечу, что совместимая с  $\mu$  и  $v$  связность на  $\text{Tot } B$  сохраняет степень полиномиальной вдоль слоев функции. Иначе говоря, она дает эндоморфизм  $\text{Lie}_{\tilde{X}}$  пучка  $C_1^\infty \text{Tot } B$  послойно линейных функций на  $\text{Tot } B$ , полученный дифференцированием вдоль векторного поля  $X$ , поднятого до  $\tilde{X}$  с  $M$  на  $\text{Tot } B$  с помощью связности.

**Шаг 3:** Это дифференцирование удовлетворяет правилу Лейбница, то есть определяет связность на  $C_1^\infty \text{Tot } B = B^*$ . ■

## Связности на главных расслоениях

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $G$  – группа Ли,  $E \rightarrow M$  – главное  $G$ -расслоение, а  $T_{\text{hor}}E \subset TE$  – связность Эресманна. Она называется  **$G$ -инвариантной**, если для любого  $g \in G$  и  $X \in T_{\text{hor}}E$ , поле  $g(X)$  лежит в  $T_{\text{hor}}E$ . **Связность на главном  $G$ -расслоении** есть  $G$ -инвариантная связность Эресманна.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $X$  – топологическое пространство, на котором группа  $G$  действует непрерывно, свободно и транзитивно (такое пространство называется **торсором над  $G$** ). Рассмотрим группу  $H = \text{Aut}_G(X)$  гомеоморфизмов  $X$ , коммутирующих с действием  $G$ . **Тогда  $H = G$ .**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** отождествим  $X$  с  $G$ , которое слева действует на себе, выбрав в  $X$  отмеченную точку. Поскольку левое действие  $G$  коммутирует с правым, **мы получаем вложение  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_G(X)$** . С другой стороны, **каждый автоморфизм  $X$  задается образом одной точки, и поэтому  $\rho$  сюръективен.** ■

**СЛЕДСТВИЕ:** **Группа голономии  $G$ -инвариантной связности на главном  $G$ -расслоении есть подгруппа  $G$ .**

## $G$ -инвариантные векторные поля

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $X$  – гладкий торсор над группой Ли  $G$ . Тогда **пространство  $\text{Lie}_G(X)$   $G$ -инвариантных векторных полей на  $X$  канонически отождествляется с алгеброй Ли  $G$ .**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Это инфинитезимальная версия изоморфизма  $\text{Aut}_G X = G$ ; доказывается точно также.

Отождествим  $X$  с  $G$ , которое слева действует на себе, выбрав в  $X$  отмеченную точку. Поскольку левое действие  $G$  коммутирует с правым, **мы получаем вложение  $\rho : \mathfrak{g} \hookrightarrow \text{Lie}_G(X)$ .** С другой стороны, **каждое  $G$ -инвариантное векторное поле на  $X$  задается своим значением в одной точке, и поэтому  $\rho$  сюръективен. ■**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $P \rightarrow M$  – главное  $G$ -расслоение, а  $\text{Lie}_G(P)$  – пространство  $G$ -инвариантных векторных полей на  $P$ . Тогда  $\mathfrak{b}$  – локально тривиальный пучок алгебр Ли на  $M$ ; он называется **пучок алгебр Ли структурной группы расслоения.**

## Пространство связностей

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть  $\mathcal{A}$  – пространство связностей Эресманна на  $M \xrightarrow{\pi} N$ . Тогда  $\mathcal{A}$  является **аффинным пространством с линеаризацией**  $\text{Hom}(\pi^*TN, T_\pi M)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Пусть  $s, s' : M \rightarrow J^1(M, \pi)$  два сечения аффинного расслоения 1-джетов сечений  $\pi$ . Тогда  $s - s'$  – сечения соответствующего векторного расслоения  $\text{Hom}(\pi^*TN, T_\pi M)$ . ■

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $M \xrightarrow{\pi} N$  – главное  $G$ -расслоение, а  $\mathcal{A}$  – пространство связностей на  $\pi$ . Тогда  $\mathcal{A}$  есть **аффинное векторное пространство, линеаризация которого  $W$  канонически изоморфна  $\Lambda^1 N \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{g}$  есть пучок алгебр Ли структурной группы.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**  $\mathcal{A}$  есть аффинное векторное пространство, линеаризация которого  $W$  отождествляется с пространством  $G$ -инвариантных сечений  $\pi^*\Lambda^1 N \otimes T_\pi M$ , но  $\text{Lie}_G(M) = \mathfrak{g}$ . ■

## Связности на присоединенных расслоениях

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $M \rightarrow N$  – главное  $G$ -расслоение, а  $X$  – гладкое многообразие с действием  $G$ . Обозначим за  $\mathcal{X}$  присоединенное расслоение  $\mathcal{X} := M \times_G X$ . Пусть  $TM = T_\pi M \oplus T_{\text{hor}}M$  –  $G$ -инвариантная связность Эресманна, а  $v : X \times M \rightarrow M \times_G X$  – стандартная проекция. Тогда что  $T_{\text{hor}}\mathcal{X} := Dv(T_{\text{hor}}M)$  задает связность Эресманна на  $\mathcal{X} \rightarrow N$ , которая называется **связность на присоединенном расслоении, индуцированная  $T_{\text{hor}}M$** .

**Утверждение 1:** Пусть  $M \xrightarrow{\pi} N$  – главное  $G$ -расслоение,  $\nabla$  – связность на  $\pi$ ,  $V$  – представление  $G$ , а  $B \rightarrow N$  – присоединенное векторное расслоение,  $B = M \times_G V$ . Рассмотрим связность Эресманна  $\nabla^B$  на  $\text{Tot } B$ , индуцированную с  $\nabla$ . **Тогда это линейная связность.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Надо проверить аддитивность этой связности; но конструкция перестановочна со сложением в  $V$ . ■

## Линейные связности и реперы

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $B$  – векторное расслоение над  $M$ , а  $P \rightarrow M$  – расслоение реперов (главное  $GL(n)$ -расслоение). **Тогда существует естественная биекция** между **1. связностями на  $P$** , **2. линейными связностями на  $\text{Tot } B$** , и **3. связностями на векторном расслоении  $B$** .

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $\mathcal{A}_P$  есть пространство связностей на  $P$ ,  $\mathcal{A}_B$  – пространство линейных связностей на  $\text{Tot } B$ , а  $\mathcal{A}$  – пространство связностей на  $B$ . Изоморфизм из  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{A}_B$  построен выше (Утверждение 1).

**Шаг 2:** Морфизм аффинных пространств  $\mathcal{A}_P \rightarrow \mathcal{A}_B$  построен выше (Утверждение 2); чтобы убедиться, что это изоморфизм, заметим, что линеаризация  $\mathcal{A}_P$  есть  $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{gl}(B) = \Lambda^1 M \otimes \text{End } B$ , а линеаризация  $\mathcal{A}_B$  есть то же самое в силу шага 1. ■

## Связности и структурные группы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $E \rightarrow M$  – главное  $G$ -расслоение,  $V$  – представление  $G$ , а  $B := E \times_G V$  – присоединенное векторное расслоение. Напомним, что в такой ситуации  $G$  называется **структурной группой**  $B$ . Говорится, что линейная связность  $\nabla$  на  $B$  **согласована со структурной группой**  $G$ , если  $\nabla$  индуцирована связностью на главном расслоении  $E$ . В такой ситуации  $\nabla$  называется  $G$ -связностью.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** В условиях предыдущей задачи, отождествим по-слойно линейные вертикальные векторные поля на  $\text{Tot } B$  с  $\text{End } B$ . Это задает отображение  $\mathfrak{b} \rightarrow \text{End } B$ . Его образ  $\mathfrak{g}_B$  в  $\text{End}(B)$  называется **структурная алгебра Ли векторного расслоения**  $B$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $B$  – векторное расслоение со структурной группой  $G$ . Тогда пространство  $G$ -связностей на  $B$  аффинно над  $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g}_B$ , а кривизна  $G$ -связности принимает значения в  $\Lambda^2 M \otimes \mathfrak{g}_B$ .