Векторные расслоения, лекция 12: Кручение G-структур

Миша Вербицкий

16 декабря, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Главные G-расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции задаются гладкими отображениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – топологическое пространство, снабженное свободным, непрерывным действием группы Ли G, а факторпространство M/G с топологией фактора хаусдорфово. В такой ситуации проекция $M \to M/G$ называется **главным G-расслоением**. Если на M и на M/G заданы согласованные структуры гладкого многообразия, а действие $G \times M \to M$ гладко, главное G-расслоение называется **гладким**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиализация** главного G-расслоения $M \xrightarrow{\pi} N = M/G$ есть выбор сечения π, то есть такого отображения $N \xrightarrow{s} M$, что $s \circ \pi = \mathsf{Id}_N$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Гладкие главные G-расслоения локально тривиальны.**

Присоединенные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – топологические пространства с действием группы G. Определим $X \times_G Y$ как $X \times Y/G$ с топологией фактора, где g действует на $X \times Y$ "диагонально", то есть по формуле $g(x,y) = (gx, gy)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V – представление группы G, а E – главное G-расслоение над M. **Тогда аддитивная структура на V определяет структуру векторного расслоения над M на произведении $E \times_G V$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное расслоение $E \times_G V$ называется **присоединенным векторным расслоением**, или **ассоциированным векторным расслоением**, связанным с E и представлением V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B = E \times_G V$ – векторное расслоение, которое получено из главного G-расслоения и представления V группы G. Тогда G называется **структурной группой расслоения B**.

Связность Эресманна (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюрьективен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** $T_\pi M$ субмерсии $\pi: M \to M'$ есть ядро $D\pi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to N$ – гладкая субмерсия, а $T_\pi M \subset TM$ – послойное ("вертикальное") касательное расслоение. **Связность Эресманна** есть подрасслоение $B \subset TM$ такое, что $T_\pi M \oplus B = TM$. В такой ситуации, B называется **горизонтальное касательное расслоение** для субмерсии, и обозначается $T_{\text{hor}} M$ или $T_\nabla M$, где ∇ обозначает связность Эресманна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Проекция осуществляет изоморфизм слоев $T_{\text{hor}} M\Big|_x$ и $T_{\pi(x)} N$. Поэтому $T_{\text{hor}} M = \pi^* TN$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \in TN$ – векторное поле. Соответствующее векторное поле $\pi^* X \in \pi^* TM = T_{\text{hor}} M$ называется **горизонтальным подъемом X в $T_{\text{hor}} M$**.

Связности Эресманна и 1-джеты сечений (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: X \to Y$ – гладкая субмерсия, а $s_1, s_2 : Y \to X$ – сечения π, которые проходят через точку $x \in X$. Говорится, что s_1 и s_2 **имеют одинаковый 1-джет в x**, если $T_x S_1 = T_x S_2$, где $S_1 = \operatorname{im} s_1$ и $S_2 = \operatorname{im} s_2$. Пространство классов эквивалентности обозначается $J^1_x(X, \pi)$, а объединение $J^1_x(X)$ по всем $x \in X$ называется **пространство 1-джетов сечений π**, и обозначается $J^1(X, \pi)$. Мы рассматриваем на $J^1(X, \pi)$ топологию, индуцированную C^1-топологией на пространстве сечений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $T_{\mathrm{hor}} X \subset TX$ – связность Эресманна на гладкой субмерсии $\pi: X \to Y$. Тогда **для каждой точки $x \in X$, в какой-то окрестности $U \ni \pi(x)$ существует сечение $s: U \to X$, содержащее x,** и касательное к $T_{\mathrm{hor}} X$; очевидно, **1-джет такого сечения в x задается этим условием однозначно.**

ТЕОРЕМА: Это задает **биекцию между множеством связностей Эресманна и множеством сечений проекции $\pi_1 : J^1(X, \pi) \to X$.** ■

Линейные связности (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – векторное расслоение со связностью ∇. Тогда для каждой точки $b \in \operatorname{Tot} B$ в какой-то окрестности $U \ni \pi(b)$ **существует сечение $s: U \to \operatorname{Tot} B$, содержащее b, и удовлетворяющее $\nabla s\big|_{\pi(b)} = 0$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: 1-джет сечения $s: U \to \operatorname{Tot} B$, удовлетворяющего $\nabla s\big|_{\pi(b)} = 0$, **задается однозначно.** Действительно, **если два джета сечений удовлетворяют этому уравнению, их производные в b равны.** Это задает сечение расслоения 1-джетов $J^1(\operatorname{Tot} B, \pi) \to \operatorname{Tot} B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – векторное расслоение со связностью ∇, а $s: \operatorname{Tot} B \to J^1(\operatorname{Tot} B, \pi)$ – сечение расслоения 1-джетов, построенное выше. Соответствующая связность Эресманна называется **линейной**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Параллельный перенос относительно этой связности Эресманна равен параллельному переносу относительно ∇.

Связности на главных расслоениях (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, $E \to M$ – главное G-расслоение, а $T_{\mathrm{hor}}E \subset TE$ – связность Эресманна. Она называется **G-инвариантной**, если для любого $g \in G$ и $X \in T_{\mathrm{hor}}E$, поле $g(X)$ лежит в $T_{\mathrm{hor}}E$. **Связность на главном G-расслоении** есть G-инвариантная связность Эресманна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – топологическое пространство, на котором группа G действует непрерывно, свободно и транзитивно (такое пространство называется **торсором над G**). Рассмотрим группу $H = \mathrm{Aut}_G(X)$ гомеоморфизмов X, коммутирующих с действием G. **Тогда $H = G$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Отождествим X с G, которое слева действует на себе, выбрав в X отмеченную точку. Поскольку левое действие G коммутирует с правым, **мы получаем вложение $\rho: G \to \mathrm{Aut}_G(X)$.** С другой стороны, **каждый автоморфизм X задается образом одной точки, и поэтому ρ сюрьективен.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Группа голономии G-инвариантной связности на главном G-расслоении есть подгруппа G.**

G-инвариантные векторные поля (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – гладкий торсор над группой Ли G. Тогда **пространство** $\operatorname{Lie}_G(X)$ **G-инвариантных векторных полей на X канонически отождествляется с алгеброй Ли G.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это инфинитезимальная версия изоморфизма $\operatorname{Aut}_G X = G$; доказывается точно также.

Отождествим X с G, которое слева действует на себе, выбрав в X отмеченную точку. Поскольку левое действие G коммутирует с правым, **мы получаем вложение $\rho : \mathfrak{g} \hookrightarrow \operatorname{Lie}_G(X)$.** С другой стороны, **каждое G-инвариантное векторное поле на X задается своим значением в одной точке, и поэтому ρ сюрьективен.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $P \to M$ – главное G-расслоение, а $\operatorname{Lie}_G(P)$ – пространство G-инвариантных векторных полей на P. Тогда $\mathfrak{b}$ – локально тривиальный пучок алгебр Ли на M; он называется **пучок алгебр Ли структурной группы расслоения.**

Пространство связностей (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\mathcal{A}$ – пространство связностей Эресманна на $M \stackrel{\pi}{\to} N$. Тогда **$\mathcal{A}$ является аффинным пространством с линеаризацией $\operatorname{Hom}(\pi^* TN, T_\pi M)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $s, s' : M \to J^1(M, \pi)$ два сечения аффинного расслоения 1-джетов сечений π. Тогда $s - s'$ – сечения соответствующего векторного расслоения $\operatorname{Hom}(\pi^* TN, T_\pi M)$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $M \stackrel{\pi}{\to} N$ – главное G-расслоение, а $\mathcal{A}$ – пространство связностей на π. Тогда $\mathcal{A}$ есть **аффинное векторное пространство, линеаризация которого W канонически изоморфна $\Lambda^1 N \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть пучок алгебр Ли структурной группы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mathcal{A}$ есть аффинное векторное пространство, линеаризация которого W отождествляется с пространством G-инвариантных сечений $\pi^* \Lambda^1 N \otimes T_\pi M$, но $\operatorname{Lie}_G(M) = \mathfrak{g}$. ■

Связности на присоединенных расслоениях (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M \to N$ – главное G-расслоение, а X – гладкое многообразие с действием G. Обозначим за $\mathcal{X}$ присоединенное расслоение $\mathcal{X} := M \times_G X$. Пусть $TM = T_\pi M \oplus T_{\mathsf{hor}} M$ – G-инвариантная связность Эресманна, а $v: \ X \times M \to M \times_G X$ – стандартная проекция. Тогда что $T_{\mathsf{hor}}\mathcal{X} := Dv(T_{\mathsf{hor}} M)$ задает связность Эресманна на $\mathcal{X} \to N$, которая называется **связность на присоединенном расслоении, индуцированная $T_{\mathsf{hor}} M$.**

Утверждение 1: Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G-расслоение, ∇ – связность на π, V – представление G, а $B \to N$ – присоединенное векторное расслоение, $B = M \times_G V$. Рассмотрим связность Эресманна ∇^B на $\operatorname{Tot} B$, индуцированную с ∇. **Тогда это линейная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Надо проверить аддитивность этой связности; но конструкция перестановочна со сложением в V. ■

ТЕОРЕМА: Пусть B – векторное расслоение над M, а $P \to M$ – расслоение реперов (главное $GL(n)$-расслоение). **Тогда существует естественная биекция** между **1. связностями на P, 2. линейными связностями на $\operatorname{Tot} B$,** и **3. связностями на векторном расслоении B.**

Связности и структурные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $E \to M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Напомним, что в такой ситуации G называется **структурной группой** B. Говорится, что линейная связность ∇ на B **согласована со структурной группой** G, если ∇ индуцирована связностью на главном расслоении E. В такой ситуации ∇ называется G-связностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В условиях предыдущей задачи, отождествим послойно линейные вертикальные векторные поля на $\operatorname{Tot} B$ с $\operatorname{End} B$. Это задает отображение $\mathfrak{b} \to \operatorname{End} B$. Его образ $\mathfrak{g}_B$ в $\operatorname{End}(B)$ называется **структурная алгебра Ли векторного расслоения** B.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение со структурной группой G. **Тогда пространство G-связностей на B аффинно над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g}_B$**, а **кривизна G-связности принимает значения в $\Lambda^2 M \otimes \mathfrak{g}_B$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аналогичный факт для главных расслоений уже доказан, но каждая G-связность на B индуцирована с G-связности на его главном G-расслоении. ■

Кривизна связности на главном G-расслоении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кривизна связности Эресманна для субмерсии $\pi : X \to Y$ есть форма Фробениуса подрасслоения $T_{\mathrm{hor}}X \subset TX$,

$$\Phi : \Lambda^2 T_{\mathrm{hor}}X \to T_\pi X.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно считать кривизну Θ связности Эресманна 2-формой на Y со значениями в бесконечномерном расслоении послойных векторных полей: $\Theta \in \Lambda^2 Y \otimes \pi_* T_\pi X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $P \to M$ – главное G-расслоение, а $\Theta \in \Lambda^2 N \otimes \pi_* T_\pi$ – кривизна G-инвариантной связности. **Тогда Θ лежит в $\Lambda^2 M \otimes \mathfrak{g}$,** где $\mathfrak{g}$ – структурная алгебра Ли расслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Θ G-инвариантна, то есть принимает значения в послойных G-инвариантных векторных полях: $\Theta \in \Lambda^2 \otimes (\pi_* T_\pi)^G$. Но $(\pi_* T_\pi)^G = \mathfrak{g}$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P \to M$ – главное G-расслоение, $B = P \times_X V$ – присоединенное векторное, $\mathfrak{g}$ – структурная алгебра Ли P, а $\mathfrak{g}_B$ – ее образ в $\operatorname{End} B$. **Тогда кривизна любой G-связности на B принимает значения в $\mathfrak{g}_B$.** ■

Кручение G-структур

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, снабженная гомоморфизмом в $GL(n)$. **G-структура** на n-мерном многообразии M есть редукция структурной группы TM с $GL(n)$ до G.

ЗАМЕЧАНИЕ: G-Связности на TM являются аффинным пространством над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть структурная алгебра Ли. Поэтому **кручение есть аффинное отображение из пространства $\mathcal{A}_G$ G-связностей в $\Lambda^2 M \otimes TM$,** а его линеаризация – $\mathrm{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^2 M \otimes TM$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение тензоров внутреннего кручения** $_G$ (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор

$$T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}.$$

Кручение (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в $_G$.

Кручение G-структур (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Расслоение тензоров внутреннего кручения G (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор

$$T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathsf{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}.$$

Внутреннее кручение (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в G.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кручение G-структуры не зависит от выбора связности. Действительно, если две связности отличаются на A, их тензоры кручения отличаются на $\mathsf{Alt}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим G-структуру $\mathfrak{G}$ на M. Тогда **на TM есть G-связность без кручения тогда и только тогда, когда кручение $\mathfrak{G}$ зануляется.**

ПРИМЕР: Для $G = SO(n)$, расслоение $T_G = \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathsf{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M)}$ тривиально. **Соответствующая связность без кручения есть связность Леви-Чивита.**

Тривиальные G-структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\psi : \ M \to M'$ – диффеоморфизм многообразий с заданными на них G-структурами. Этот диффеоморфизм **согласован с G-структурой**, если он продолжается до соответствующих G-расслоений: $\psi_P : \ P \to \psi^* P'$, таким образом, что $D\psi : \ TM = P \times_G V \to P' \times_G V$ равно $\psi_P \times_G \mathrm{Id}_V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – представление группы G. **Тривиальная G-структура** на многообразии $M = V$ есть тавтологическая редукция стуктурной группы TV к G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально тривиальная G-структура** на M есть G-структура, для которой заданы локальные, согласованные с G-структурой диффеоморфизмы M и шаров в V с тривиальной G-структурой.

ПРИМЕР: Кручение $Sp(n, \mathbb{R})$-структуры равно дифференциалу соответствующей 2-формы. **Симплектическая форма задает локально тривиальную $Sp(n, \mathbb{R})$-структуру** (теорема Дарбу).

ПРИМЕР: **Комплексная структура задает локально тривиальную $GL(n, \mathbb{C})$-структуру.**

Джеты G-структур

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два подмногообразия $N, N' \subset M$, проходящие через точку m, касаются в точке m кратностью k, если в окрестности m можно задать N и N' образами диффеоморфизмов $\varphi, \varphi' : \mathbb{R}^k \to M$, причем все производные φ и φ', вплоть до k-й, равны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \hookrightarrow GL(n)$ подгруппа Ли, а $\pi : P \to M$ – расслоение реперов на n-многообразии M, а $P_G \subset P$ – соответствующая G-структура, то есть гладкое подрасслоение, такое, что G действует транзитивно на слоях. Две G-структуры P_G и $P_{G'}$ называются **эквивалентными с точностью до порядка k** в $m \in M$, если P_G касается $P_{G'}$ в $\pi^{-1}(m)$ с кратностью k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы эквивалентности G-структур с точностью до порядка k называются **k-джетами G-структур.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: G-структура $\mathfrak{G}$ называется **тривиальной с точностью до k-го порядка**, если для каждой точки M найдется тривиальная G-структура $\mathfrak{G}_m$ с тем же самым k-джетом.

ТЕОРЕМА: G-структура **тривиальна с точностью до порядка 1** тогда и только тогда, когда ее **внутреннее кручение равно нулю.**

G-структуры типа k

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Картан-Гильемин)
Группа $G \subset GL(n,\mathbb{R})$, называется **конечного типа k**, если для любой G-структуры из тривиальности с точностью до порядка k следует локальная тривиальность.

ТЕОРЕМА: (Картан-Гильемин)
Группы конечного типа 1:

1. $SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ (многообразия с фиксированной формой объема).
2. $Sp(n,\mathbb{R}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$ (симплектические многообразия).
3. $Sp(n,\mathbb{R}) \subset GL(2n+1,\mathbb{R})$ (контактные многообразия).
4. $Sp(n,\mathbb{R}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$ (локально конформно симплектические многообразия).
5. $\mathbb{R} \cdot Sp(n,\mathbb{R}) \subset GL(2n+1,\mathbb{R})$ (локально конформно контактные многообразия).

Этим списком исчерпываются все группы конечного типа 1, для которых G не сохраняет никаких интегрируемых подрасслоений в $TM \otimes \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если в последней строчке заменить $TM \otimes \mathbb{C}$ на TM, к списку добавятся комплексные версии всех перечисленных групп.