SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MARCO BRUNELLA

Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes

Séminaire N. Bourbaki, 2000-2001, exp. n° 881, p. 39-61.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__39_0>

Séminaire BOURBAKI
53^{e} année, 2000-2001, n^{o} 881, p. 39 à 61

Novembre 2000

COURBES ENTIÈRES DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES COMPLEXES [d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...]

par **Marco BRUNELLA**

1. QUELQUES CONJECTURES ET QUELQUES THÉORÈMES SUR LES COURBES ENTIÈRES

Soit X une variété complexe. Une *courbe entière* dans X est une application holomorphe non constante de la droite complexe $\mathbf{C}$ à valeurs dans X. La variété X est *hyperbolique* (au sens de Brody [Kob]) si elle ne contient aucune courbe entière. Les variétés complexes compactes qui possèdent une métrique kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe négative sont des exemples classiques de variétés hyperboliques [Kob].

Rappelons qu'une variété projective complexe X est *de type général* si son fibré canonique $K_X = \det(\Omega^1_X)$ est *gros*, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $K_X^{\otimes m}$ possède $n+1$ ($n = \dim X$) sections holomorphes globales algébriquement indépendantes $s_0, \ldots, s_n$ (i.e., les fonctions méromorphes $\frac{s_1}{s_0}, \ldots, \frac{s_n}{s_0}$ sont algébriquement indépendantes). La propriété « K_X gros » est très proche (mais un peu plus faible) de « K_X ample », ce qui équivaut d'ailleurs, du point de vue métrique, à « K_X possède une métrique hermitienne à courbure positive » et donc à « X possède une métrique kählérienne à courbure de Ricci négative » (Aubin, Yau). Il est donc naturel de s'attendre à des contraintes sur les courbes entières dans les variétés de type général. Autour de 1980, Green et Griffiths proposaient dans [GGr] la conjecture suivante.

CONJECTURE 1.1 (Green–Griffiths). — *Soit X une variété projective complexe de type général, et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière dans X. Alors l'image de f n'est pas Zariski-dense dans X : il existe une hypersurface algébrique $Y \subset X$ telle que $f(\mathbf{C}) \subset Y$.*

Ici l'hypersurface Y dépend, a priori, de la courbe f. On trouve dans les travaux de Lang (par exemple [Lan]) la conjecture un peu plus forte selon laquelle, étant donné X comme ci-dessus, il existe une sous-variété propre $Z \subset X$ telle que *toute* courbe entière dans X est contenue dans Z. En plus, selon cette même conjecture, Z coïncide avec l'adhérence de Zariski de l'union de toutes les sous-variétés de X qui sont images de variétés abéliennes par des applications rationnelles non constantes. Ces conjectures de Lang sont intimement liées à certaines conjectures de nature arithmétique, dont nous ne parlerons pas et pour lesquelles nous renvoyons à [Lan].

Si $\dim X = 1$, la conjecture 1.1 ne présente aucune difficulté : « type général » signifie dans ce cas que le genre de X est au moins 2, et donc toute application holomorphe de $\mathbf{C}$ dans X est constante (Liouville).

Si $\dim X = n \geqslant 2$, la situation est par contre beaucoup plus compliquée, et même pour $n = 2$ la conjecture 1.1 n'a pas encore été entièrement démontrée. Avant d'énoncer le théorème de McQuillan, qui constitue l'objet central de cet exposé, nous allons expliquer une approche de la conjecture 1.1 (et d'autres conjectures sur les courbes entières) qui s'est révélée fructueuse.

Le point de départ est le résultat suivant, qui se trouve dans [GGr] (avec une lacune dans la preuve) et dans [Dm1] et [SY2]. Voir aussi [Dm2] pour un exposé très agréable de ces idées. Soit X une variété projective complexe et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière. Soit P un *opérateur différentiel algébrique* sur X à valeurs dans le dual A^* d'un fibré linéaire ample $A \in \mathrm{Pic}(X)$ (nous renvoyons aux articles mentionnés pour la définition exacte de ces opérateurs différentiels, mais le lecteur peut bien s'imaginer ce que cela signifie). Alors f satisfait l'équation différentielle associée à P :

$$P(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \equiv 0.$$

La preuve de ce théorème est basée sur des arguments de courbure négative (lemme d'Ahlfors–Schwarz), ou bien sur des estimations de la théorie de Nevanlinna (lemme de la dérivée logarithmique).

Supposons, pour fixer les idées, qu'on veut démontrer qu'une variété X est hyperbolique. D'après le résultat ci-dessus, il suffit de construire sur X un nombre assez grand d'opérateurs différentiels algébriques « indépendants » (et à valeurs dans les duaux de fibrés amples) : chacun de ces opérateurs donne une équation différentielle satisfaite par toute application holomorphe $f : \mathbf{C} \to X$, et si l'on dispose d'un nombre assez grand d'équations différentielles « indépendantes », on en déduit la constance de f. Nous expliquerons plus loin, dans des cas concrets, la notion d'indépendance requise.

La difficulté dans cette approche est qu'il n'est pas du tout facile de construire des opérateurs différentiels algébriques « indépendants ». Construire des opérateurs différentiels algébriques revient à construire des sections holomorphes globales de certains fibrés, ce qu'on peut faire à l'aide de la formule de Riemann–Roch (à condition de savoir calculer certaines classes de Chern, de savoir démontrer certains théorèmes d'annulation de cohomologie,...). Par exemple, dans [GGr] on montre que, si X est une surface de type général, alors de tels opérateurs différentiels existent toujours. Mais la condition d'« indépendance » est souvent difficile, sinon impossible, à vérifier :

la formule de Riemann–Roch permet (parfois) de montrer qu'un fibré a des sections non triviales, voire *beaucoup* de telles sections, mais ne permet pas de contrôler les lieux d'annulation de ces sections, et c'est justement ces lieux d'annulation qui interviennent dans cette condition d'« indépendance ».

Il y a toutefois des cas où la stratégie qu'on vient de décrire marche assez bien. C'est par exemple le cas du théorème de Bloch (1926) qui affirme que la conjecture 1.1 est vraie si $\dim H^0(X, \Omega^1_X) > \dim X$ et qu'on redémontre dans [GGr] et [Dm1] (entre autres). Ici, grosso modo, ce sont les 1-formes holomorphes sur X qui fournissent les opérateurs différentiels recherchés. Un autre exemple remarquable, sur lequel nous reviendrons, est le théorème de Lu et Yau [LuY] qui prouve la conjecture 1.1 dans le cas des surfaces de type général avec signature strictement positive ($c_1^2 > 2c_2$). Enfin, Siu et Yeung montrent dans [SY1], par ces mêmes techniques, l'hyperbolicité du complémentaire dans le plan projectif d'une courbe générique de degré assez grand.

Voici maintenant le théorème de McQuillan, qui prouve la conjecture de Green–Griffiths dans le cas des surfaces dont la classe de Segre $c_1^2 - c_2$ est strictement positive.

THÉORÈME 1.2 ([MQ1]). — *Soit X une surface projective complexe de type général dont les nombres de Chern satisfont l'inégalité $c_1^2(X) > c_2(X)$. Alors aucune courbe entière dans X n'est Zariski-dense.*

C'est-à-dire, une courbe entière dans une telle surface a son image contenue dans une courbe *algébrique*, courbe qui doit être, évidemment, rationnelle ou elliptique. D'autre part, dans les années '70 Bogomolov avait démontré que, sous les mêmes hypothèses (et nous verrons que ce n'est pas par hasard), X contient un nombre *fini* de courbes rationnelles ou elliptiques [Bog] (voir aussi [Des] pour un exposé dans ce séminaire). On obtient ainsi (McQuillan + Bogomolov) une confirmation partielle de la conjecture de Lang : une surface X de type général avec $c_1^2(X) > c_2(X)$ contient une courbe algébrique C (dont les composantes irréductibles sont rationnelles ou elliptiques) telle que toute courbe entière dans X est en fait contenue dans C.

Il nous conviendra de découper le théorème 1.2 en deux morceaux :

THÉORÈME 1.3 ([MQ1]; voir aussi [LuY], [GGr], [Dm1]). — *Soit X une surface projective complexe de type général avec $c_1^2(X) > c_2(X)$ et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière. Il existe alors une surface projective complexe Z, une application holomorphe surjective $\pi : Z \to X$ et un feuilletage holomorphe (singulier) $\mathcal{F}$ sur Z tels que :*

i) *f se relève sur Z en une courbe entière g (i.e., il existe une courbe entière $g : \mathbf{C} \to Z$ telle que $\pi \circ g = f$);*

ii) *g est tangente à $\mathcal{F}$ (i.e., si ω est une 1-forme holomorphe locale qui définit $\mathcal{F}$, on a alors $g^*(\omega) \equiv 0$).*

THÉORÈME 1.4 ([MQ1]). — *Soit Z une surface projective complexe de type général, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sur Z et soit $g : \mathbf{C} \to Z$ une courbe entière tangente à $\mathcal{F}$. Alors $g(\mathbf{C})$ n'est pas Zariski-dense dans Z.*

Le théorème 1.2 est corollaire des théorèmes 1.3 et 1.4. Remarquons que la surface Z qui apparaît dans le théorème 1.3 est forcément de type général (car X l'est), même si sa classe de Segre $c_1^2(Z) - c_2(Z)$ n'est plus nécessairement positive. Heureusement, dans le théorème 1.4 il n'y a aucune hypothèse sur les nombres de Chern de Z.

Le théorème 1.3 n'est pas, à vrai dire, entièrement nouveau. En effet, c'est un cas spécial du résultat de [GGr], [Dm1] et [SY2] rappelé ci-dessus, via des arguments de Bogomolov [Bog] (voir aussi [LuY]). Plus exactement, ces arguments de Bogomolov (qu'on expliquera en détail dans la suite) permettent de montrer l'existence sur X d'opérateurs différentiels algébriques *du premier ordre* (i.e., sections holomorphes globales non triviales de $(\mathrm{Sym}^m \Omega_X^1) \otimes A^*$, pour m entier assez grand et A ample), et dire qu'une courbe entière est solution de l'équation différentielle associée à un tel opérateur revient à dire que, modulo un revêtement $Z \to X$ (de degré m), la courbe entière est tangente à un feuilletage holomorphe. D'ailleurs, c'est en développant ces arguments que Lu et Yau démontrent le théorème 1.2 dans le cas $c_1^2(X) > 2c_2(X)$: en utilisant un résultat de Miyaoka [Miy], ils montrent (grosso modo) que X possède *deux* opérateurs différentiels algébriques du premier ordre et « indépendants », donc la courbe entière est tangente à *deux* feuilletages holomorphes, ce qui entraîne bien sûr qu'elle n'est pas Zariski-dense.

La preuve de McQuillan du théorème 1.3 est toutefois indépendante de [GGr], [Dm1], [SY2] : les arguments de Bogomolov sont combinés avec une *inégalité tautologique* pour les courbes entières, démontrée au début de [MQ1] et qui est, d'une certaine façon, la contrepartie globale (ou cohomologique) des arguments infinitésimaux (lemme d'Ahlfors–Schwarz) de [GGr], [Dm1], [SY2]. Cette inégalité joue un rôle fondamental aussi dans la preuve du théorème 1.4.

À côté de la conjecture de Green–Griffiths, une autre conjecture sur les courbes entières qui a été beaucoup étudiée est celle de Kobayashi, formulée autour de 1970.

CONJECTURE 1.5 (Kobayashi). — i) *Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un entier $d(n)$ tel que toute hypersurface générique dans $\mathbf{C}P^{n+1}$ de degré $d \geqslant d(n)$ est hyperbolique.*

ii) *Pour tout $n \geqslant 1$ il existe un entier $e(n)$ tel que, pour toute hypersurface générique D dans $\mathbf{C}P^n$ de degré $e \geqslant e(n)$, le complémentaire $\mathbf{C}P^n \setminus D$ est hyperbolique.*

Ici *générique* signifie qu'il faut exclure, dans l'espace des hypersurfaces de degré donné, celles qui appartiennent à une union dénombrable de sous-ensembles algébriques.

Pour $n = 1$ la conjecture 1.5 est facile, avec $d(1) = 4$ et $e(1) = 3$. Pour $n \geqslant 2$ le résultat optimal devrait être avec $d(n) = e(n) = 2n+1$ [Zai]. Moralement, la partie ii) devrait être réduisible à la partie i) (avec $e(n) = d(n)$), en considérant dans $\mathbf{C}P^{n+1}$ l'hypersurface donnée comme revêtement cyclique de $\mathbf{C}P^n$, de degré e et ramifié le long de D, et en relevant sur cette hypersurface les courbes entières dans $\mathbf{C}P^n \setminus D$. Il y a toutefois une lacune dans ce raisonnement, car les hypersurfaces dans $\mathbf{C}P^{n+1}$

obtenues par cette construction ne sont pas génériques par rapport à la totalité des hypersurfaces. Remarquons cependant que ces revêtements cycliques forment un sous-ensemble algébrique dans l'ensemble des hypersurfaces. Pour réparer la lacune, il suffit alors de montrer que ce sous-ensemble algébrique n'est pas entièrement contenu dans un des sous-ensembles algébriques exclus par la partie i) de la conjecture (voir [DEG] pour un exemple de cette démarche).

Dans le cas $n = 2$, la conjecture de Kobayashi est conséquence de la conjecture de Green–Griffiths, avec $d(2) = e(2) = 5$. En effet, une (hyper)surface lisse X dans $\mathbf{C}P^3$ de degré $d \geqslant 5$ est de type général, donc (si la conjecture 1.1 est vraie) toute courbe entière dans X est contenue dans une courbe rationnelle ou elliptique. Mais un théorème de Clemens [Cle] (de Xu [XuG] si $d = 5$) affirme que, si de plus X est générique, alors X ne contient *aucune* courbe rationnelle ou elliptique, d'où son hyperbolicité. Un raisonnement similaire s'applique au cas du complémentaire $\mathbf{C}P^2 \setminus D$, via le revêtement cyclique mentionné ci-dessus. Le théorème de Clemens est dans ce cas remplacé par la constatation facile suivante : une courbe générique $D \subset \mathbf{C}P^2$ de degré $e \geqslant 5$ coupe *toute* courbe elliptique en au moins 1 point et *toute* courbe rationnelle en au moins 3 points.

Cette réduction de la conjecture de Kobayashi à celle de Green–Griffiths semble envisageable aussi dans le cas $n \geqslant 3$.

On a déjà mentionné le théorème de Siu et Yeung [SY1], qui prouve la conjecture 1.5.ii) pour $n = 2$ (avec $e(2)$ de l'ordre de 10^{13}). Suite à [MQ1], Demailly et El Goul ont prouvé la conjecture 1.5.i), toujours pour $n = 2$, tout en améliorant considérablement le résultat de [SY1]. Le même théorème se trouve aussi dans [MQ2], mais avec des estimations sur le degré un peu moins fines.

THÉORÈME 1.6 ([DEG] ; voir aussi [MQ2]). — *Pour $n = 2$, la conjecture de Kobayashi 1.5 est vraie, avec $d(2) = e(2) = 21$.*

La partie ii) de la conjecture est analysée dans [DEG] par la construction de revêtements ramifiés le long de D (idem pour [SY1]). On peut toutefois étudier cette partie sans cette construction mais en utilisant des techniques « logarithmiques », à pôles sur D. Par cette voie, dans un travail plus récent El Goul a prouvé la conjecture 1.5.ii) ($n = 2$) avec $e(2) = 15$ [ElG].

Comme le théorème 1.2, le théorème 1.6 se démontre en deux étapes. D'abord, on montre que sur un revêtement de la surface X toute courbe entière devient tangente à un feuilletage holomorphe. Ensuite on applique le théorème 1.4 et on conclut avec [Cle]. La différence importante avec le théorème 1.2 est que la première partie de cette preuve (la construction du feuilletage) est bien plus compliquée. La raison est qu'une hypersurface X dans $\mathbf{C}P^3$ (de degré au moins 3) ne satisfait *jamais* l'inégalité $c_1^2(X) > c_2(X)$, ainsi les arguments de Bogomolov utilisés dans le théorème 1.3 ne sont plus suffisants. Plus précisément, ces arguments montrent, cette fois, qu'il existe sur X un opérateur différentiel algébrique *du second ordre* (et non plus du premier ordre). Un tel opérateur n'engendre pas un feuilletage sur un revêtement Z de X, mais il engendre plutôt un feuilletage (par courbes) sur une 3-variété W au-dessus de X ; la courbe entière se relève sur W et devient tangente à ce feuilletage. Il faut ensuite des arguments additionnels et assez délicats pour « réduire » la dimension de W de 3 à 2.

2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE

Soit X une variété complexe compacte et soit $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière dans X. On va d'abord rappeler comment on peut associer à f un courant positif fermé $\Phi \in A^{1,1}(X)'$, de bidegré $(1,1)$. Grosso modo, Φ sera le « courant d'intégration sur $f(\mathbf{C})$ », quitte à surmonter le problème de la non compacité de $\mathbf{C}$. C'est une construction très classique, qui dans son essence remonte à Ahlfors [Ahl] et qui se résume dans l'affirmation suivante : le bord à l'infini de $\mathbf{C}$ est négligeable.

Fixons une métrique hermitienne (i.e., une $(1,1)$-forme positive) ω sur X. Pour tout $r \in \mathbf{R}^+$ définissons le courant positif (non fermé) $\Phi_r \in A^{1,1}(X)'$ par la formule

$$\Phi_r(\eta) = \frac{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\eta)}{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)} \qquad \forall \eta \in A^{1,1}(X)$$

où $\mathbf{D}(t) \subset \mathbf{C}$ est le disque de rayon t (le lecteur pourrait se demander la raison de la double intégration $\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)}$, à la place de $\int_{\mathbf{D}(r)}$; cette raison est technique, et sera expliquée plus loin).

Un argument de compacité dans l'espace des courants montre qu'on peut choisir une suite divergente r_n, $n \in \mathbf{N}$, telle que Φ_{r_n} converge, pour $n \to +\infty$, vers un courant positif Φ. Nous voulons toutefois que cette limite soit aussi fermée. En appliquant le théorème de Stokes, on voit facilement que cette dernière propriété est satisfaite dès que la condition suivante est remplie : si $a(t) = \text{aire}(\mathbf{D}(t))$ (par rapport à la (pseudo-)métrique $f^*(\omega)$), $l(t) = \text{longueur}(\partial\mathbf{D}(t))$, $A(r) = \int_0^r a(t)\frac{dt}{t}$, $L(r) = \int_0^r l(t)\frac{dt}{t}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L(r_n)}{A(r_n)} = 0.$$

Or, c'est justement le « lemme d'Ahlfors » (ou, plus précisément, une variation sur ce lemme, voir e.g. [Br1] lemme 0) qui garantit l'existence de suites divergentes $\{r_n\}$ remplissant cette condition. En fait, « presque toute » suite divergente convient : pour tout $\varepsilon > 0$ la mesure de Lebesgue logarithmique de $\{r \in \mathbf{R}^+ \mid L(r) > \varepsilon A(r)\}$ est finie.

Dorénavant Φ désignera un courant positif fermé associé à f par la construction précédente. Remarquons que Φ ne peut pas être trivial, car $\Phi(\omega) = 1$. Un tel courant n'est pas forcément unique, car il peut dépendre de la suite $\{r_n\}$ (le choix de ω n'est par contre pas essentiel, à constante multiplicative près). On peut toutefois s'arranger pour que certaines propriétés fonctorielles soient satisfaites : par exemple, si $\pi : X_1 \to X_2$ est un morphisme surjectif entre variétés de même dimension et si f_1 et f_2 sont deux courbes entières dans X_1 et X_2 telles que $f_2 = \pi \circ f_1$ et f_1 n'est pas entièrement contenue dans le lieu critique de π, on peut alors construire Φ_1 et Φ_2 tels que $\pi_*(\Phi_1) = \Phi_2$.

Soit Y une hypersurface complexe compacte dans X, et soit $[Y]$ sa classe de cohomologie dans $H^2(X, \mathbf{R})$. Le courant fermé Φ détermine lui aussi une classe de cohomologie $[\Phi]$, dans $H^{2n-2}(X, \mathbf{R})$ (où $n = \dim X$). On peut donc faire le produit d'intersection $[\Phi] \cdot [Y] \in \mathbf{R}$; concrètement, il s'agit de prendre une 2-forme fermée lisse η qui représente $[Y]$ et d'évaluer Φ sur η. La propriété suivante sera essentielle dans la suite :

$$\textit{si} \qquad f(\mathbf{C}) \not\subset Y \qquad \textit{alors} \qquad [\Phi] \cdot [Y] \geqslant 0.$$

La preuve (voir, e.g., [Br1] lemme 1 ou [Dm2]) est une simple application des formules de Poincaré–Lelong et de Jensen, et c'est exactement ici que la « double intégration » ci-dessus montre ses qualités. Observons que l'hypothèse « $f(\mathbf{C})$ n'est pas contenue dans Y » n'exclut pas que le support de Φ, $\operatorname{Supp} \Phi$, soit entièrement contenu dans Y : on a évidemment $\operatorname{Supp} \Phi \subset \overline{f(\mathbf{C})}$, mais cette inclusion peut bien être stricte. Par exemple, il peut arriver que Φ soit le courant d'intégration sur une courbe compacte $C \subset Y$, et dans ce cas l'inégalité ci-dessus dit quelque chose de non trivial (tandis que si $C \not\subset Y$ la même inégalité est triviale).

Après ces préliminaires, nous pouvons maintenant passer à l'*inégalité tautologique* de [MQ1].

Soit PTX le fibré tangent projectivisé de X, $\pi : PTX \to X$ la projection canonique, et $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ le fibré tautologique sur PTX (qui a degré -1 sur chaque fibre de π). On peut relever la courbe entière f sur PTX, à travers sa dérivée projectivisée $f' : \mathbf{C} \to PTX$. À f' on peut associer un courant positif fermé $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ par la construction ci-dessus. On supposera en plus que la suite divergente $\{r_n\}$ satisfait les deux propriétés suivantes : si $A(r)$ et $L(r)$ sont les aires et les longueurs associées à f (pas à f') alors *(i)* $\lim_{n\to+\infty} L(r_n)/A(r_n) = 0$ et *(ii)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{dL}{dr}(r_n)/A(r_n) = 0$. La première condition dit simplement que f est associée, elle aussi, à un courant positif fermé $\Phi \in A^{1,1}(X)'$. La deuxième condition sera éclaircie plus en bas. Les arguments du lemme d'Ahlfors montrent que « presque toute » suite divergente satisfait ces deux conditions additionnelles.

On peut maintenant considérer le produit d'intersection entre $[\Phi']$ et la classe de Chern de $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$, $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \in H^2(PTX, \mathbf{R})$.

Proposition 2.1 ([MQ1], theorem A). — $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \cdot [\Phi'] \geqslant 0.$

On peut comprendre cette inégalité de la manière suivante. Soit C une courbe compacte lisse dans X, et soit C' son relevé dans PTX. Alors $\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_{C'}$ n'est rien d'autre que le fibré tangent de C (par tautologie), et donc $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)) \cdot [C'] = \chi(C)$.

Le produit qui apparaît dans la proposition 2.1 pourrait alors, à raison, être appelé « caractéristique d'Euler de Φ », et la proposition 2.1 dirait que cette caractéristique est positive ou nulle ; ce qui n'est pas inattendu, car Φ est « uniformisé » par $\mathbf{C}$.

La preuve de McQuillan de la proposition 2.1 est inspirée des travaux de Faltings et Vojta sur les conjectures (arithmétiques) de Mordell–Lang [Lan] (on a d'ailleurs déjà noté que ces conjectures arithmétiques sont, conjecturellement, liées aux courbes entières). Nous allons reproduire ici une version quelque peu simplifiée de cette preuve, version qui nous a été communiquée par Mihai Paun. Voir aussi l'appendice de [Vo1] pour une preuve basée sur le « lemme de la dérivée logarithmique ».

La métrique ω sur X induit une métrique hermitienne tautologique sur le fibré linéaire $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$, dont la courbure $\Theta \in A^{1,1}(PTX)$ représente $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1))$. Cette courbure est négative sur les fibres de π, et donc $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega - \varepsilon\Theta$ est partout positive pour $\varepsilon > 0$ assez petit ; on l'utilisera comme métrique de référence sur PTX. Si

$$T(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} (f')^*(\Theta)$$

et $A(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)$, $\widetilde{A}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} (f')^*(\widetilde{\omega})$, on a alors $\widetilde{A}(r) = A(r) - \varepsilon T(r)$. Pour démontrer l'inégalité tautologique, i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{T(r_n)}{\widetilde{A}(r_n)} \geqslant 0$, il suffit donc de prouver que $-T(r_n)$ croît plus lentement que $A(r_n)$. On prouvera que $-T(r_n) \leqslant \log(A(r_n)) + \text{const}$. La dérivée $\frac{df}{dz} : \mathbf{C} \longrightarrow TX$ définit une section tautologique $s \in H^0(\mathbf{C}, (f')^*(\mathcal{O}_{PTX}(-1)))$, ce qui permet d'écrire

$$(f')^*(\Theta) = \delta_{\{s=0\}} - dd^c \log \|s\|$$

(formule de Poincaré–Lelong). Observons que, par tautologie, la norme $\|s(z)\|$ est égale à $\|\frac{df}{dz}(z)\|_\omega$ = norme de $\frac{df}{dz}(z)$ par rapport à ω. On supposera $\frac{df}{dz}(0) \neq 0$, sans perte de généralité. La formule de Jensen et la concavité du logarithme donnent alors

$$-T(r) \leqslant \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} dd^c \log \left\|\frac{df}{dz}\right\|_\omega \leqslant \text{const} + \log \int_0^{2\pi} \left\|\frac{df}{dz}(re^{i\theta})\right\|_\omega d\theta.$$

Mais $\int_0^{2\pi} \|\frac{df}{dz}(re^{i\theta})\|_\omega d\theta = \frac{1}{r} l(r) = \frac{dL}{dr}(r)$, et pour n assez grand on a $\frac{dL}{dr}(r_n) \leqslant A(r_n)$, par le choix de $\{r_n\}$. On obtient ainsi

$$-T(r_n) \leqslant \text{const} + \log(A(r_n))$$

ce qui achève la preuve.

Remarquons que ces mêmes calculs montrent aussi que l'image directe $\pi_*(\Phi')$ est proportionnelle à Φ, plus exactement $\pi_*(\Phi') = c\Phi$ où $c = 1+\varepsilon c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1))\cdot[\Phi'] \geqslant 1$. Quitte à renormaliser $\widetilde{\omega}$ on pourra donc supposer que $\pi_*(\Phi') = \Phi$.

Dans la suite on aura besoin aussi de la version logarithmique de la proposition 2.1, version qu'on trouve explicitement dans [Vo1] et déguisée sous forme d'inégalité tautologique *raffinée* dans [MQ1]. Supposons que X contient une hypersurface D à croisements normaux, telle que $f(\mathbf{C}) \cap D = \varnothing$. Soit $TX(\log D)$ le fibré tangent logarithmique de X à pôles sur D (i.e., le dual de $\Omega^1_X(\log D)$; il est donc engendré localement par les champs de vecteurs holomorphes tangents à D). Soit $PTX(\log D)$ son projectivisé et $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ son fibré tautologique. Comme auparavant, on peut encore relever f sur $PTX(\log D)$ et associer à ce relevé f' un courant positif fermé Φ'. On a alors (quitte à bien choisir la suite divergente $\{r_n\}$...)

PROPOSITION 2.2 ([Vo1] proposition 5.1, [MQ1] theorem II.3.3.2.bis)

$$c_1(\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)) \cdot [\Phi'] \geqslant 0.$$

La preuve suit les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 2.1. La seule différence est que la métrique tautologique sur $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ est maintenant induite par une métrique $\omega_{\log}$ sur $X \setminus D$ à singularités logarithmiques le long de D. Observons que la dérivée $\frac{df}{dz}$ définit encore une section holomorphe de $(f')^*(\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1))$, car f ne coupe pas D. On est ainsi amené à montrer que $\int_0^{2\pi} \log \|\frac{df}{dz}(re^{i\theta})\|_{\omega_{\log}} d\theta$ croît plus lentement que $A(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbf{D}(t)} f^*(\omega)$, et pour cela on utilise le lemme de la dérivée logarithmique (voir, e.g., [Dm2] : grosso modo, c'est la version logarithmique du lemme d'Ahlfors).

Pour terminer cette section, signalons que dans [MQ1] et [Vo1] on trouve en réalité des inégalités plus générales que celles ci-dessus. Par exemple, McQuillan ne se limite pas aux courbes entières, mais il considère aussi des courbes « ramifiées sur $\mathbf{C}$ », et Vojta ne demande pas $f(\mathbf{C}) \cap D = \varnothing$, mais seulement $f(\mathbf{C}) \not\subset D$. Par conséquent dans leurs estimations apparaissent des termes correctifs, qui sont toutefois identiquement nuls dans les cas que nous avons traités.

3. CONSTRUCTION DE FEUILLETAGES

Dans cette section nous expliquerons d'abord la preuve de McQuillan du théorème 1.3, basée sur des idées de Bogomolov [Bog] [Des] et l'inégalité tautologique de la section précédente. Voir aussi [DEG] section 2 pour une preuve légèrement différente, qui utilise le lemme de Ahlfors–Schwarz de [Dm1] ou [SY2] à la place de l'inégalité tautologique.

Soit X une surface projective complexe lisse de type général. Comme dans la section précédente, soit $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ le fibré tautologique sur PTX (qui est une 3-variété), soit $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ son dual, et soit $\mathcal{O}_{PTX}(m) = \mathcal{O}_{PTX}(1)^{\otimes m}$. Rappelons le fait suivant : pour tout fibré linéaire L sur X, la cohomologie de X à coefficients dans $(\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \otimes L$ est isomorphe à celle de PTX à coefficients dans $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(L)$.

L'hypothèse du théorème 1.3 sur les nombres de Chern de X est utilisée exclusivement à travers le lemme suivant.

LEMME 3.1 (Bogomolov). — *Si $c_1^2(X) > c_2(X)$, alors le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros.*

Démonstration. — Un calcul standard donne $c_1^3(\mathcal{O}_{PTX}(1)) = c_1^2(X) - c_2(X) > 0$, et ainsi d'après la formule de Riemann–Roch appliquée à $\mathcal{O}_{PTX}(m)$ on a

$$\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) + \dim H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) > cm^3$$

pour un certain $c > 0$ et pour tout $m \gg 0$. D'autre part, par dualité de Serre et l'isomorphisme $K_X \otimes TX \simeq \Omega_X^1$, on a

$$H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) \simeq H^2(X, \operatorname{Sym}^m \Omega_X^1) \simeq H^0(X, K_X^{\otimes(1-m)} \otimes \operatorname{Sym}^m \Omega_X^1).$$

Mais X est de type général, donc $K_X^{\otimes(m-1)}$ a des sections holomorphes globales non triviales pour $m \gg 0$, et par conséquent pour $m \gg 0$

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, K_X^{\otimes(1-m)} \otimes \operatorname{Sym}^m \Omega_X^1) &\leqslant \dim H^0(X, \operatorname{Sym}^m \Omega_X^1) \\ &= \dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)).\end{aligned}$$

Donc $\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m)) \geqslant \dim H^2(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m))$ pour $m \gg 0$, d'où la conclusion cherchée : $\dim H^0(PTX, \mathcal{O}_{PTX}(m))$ a une croissance cubique en m, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros. □

On pourrait remarquer que la preuve ci-dessus n'a pas réellement besoin que X soit de type général : il suffit que $K_X^{\otimes m}$ soit effectif pour $m \gg 0$, ce qui est bien plus faible que K_X gros. Mais, d'après la classification des surfaces, toute surface X avec $K_X^{\otimes m}$ effectif pour $m \gg 0$ *et* $c_1^2(X) > c_2(X)$ est en fait de type général.

Fixons sur X un fibré ample A. Puisque $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est gros, le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ est aussi gros pour $m \gg 0$ (la propriété « gros » est ouverte), et en particulier il possède des sections holomorphes globales non triviales (en fait, pour tout fibré linéaire L il y a équivalence entre « L est gros » et « pour tout fibré linéaire B le fibré $L^{\otimes m} \otimes B$ est effectif pour $m \gg 0$ »). Soit s une telle section et soit $D = (s = 0) \subset PTX$ son diviseur des zéros, ainsi $\mathcal{O}_{PTX}(D)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$.

Soient $f : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière, $f' : \mathbf{C} \to PTX$ son relevé, $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ un courant positif fermé associé à f'. Notons que $\Phi = \pi_*(\Phi')$ est un courant positif fermé non trivial et donc $c_1(\pi^*(A)) \cdot [\Phi'] = c_1(A) \cdot [\Phi] > 0$ car A est ample. On a alors

$$[\Phi'] \cdot [D] = c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) \cdot [\Phi'] - c_1(\pi^*(A)) \cdot [\Phi'] < 0$$

car $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)) \cdot [\Phi'] \leqslant 0$ d'après la proposition 2.1. De cette inégalité et du fait que D est un diviseur positif on déduit qu'*il existe une composante irréductible Z de* $\operatorname{Supp} D$ *qui contient toute la courbe entière f'* :

$$f'(\mathbf{C}) \subset Z.$$

Distinguons alors deux situations possibles :

1) Z est *verticale*, i.e. $\pi(Z)$ est une courbe algébrique C dans X : on a évidemment $f(\mathbf{C}) \subset C$ et le théorème 1.3 (ainsi que le théorème 1.2) est démontré.

2) Z est *horizontale*, i.e. $\pi(Z) = X$. Une telle surface est munie naturellement d'un *feuilletage tautologique* $\mathcal{F}$: si $z \in Z$ est un point générique, où Z est transverse à la

fibration π, alors un voisinage U de z dans Z induit un feuilletage sur un voisinage V de $x = \pi(z)$ dans X (U est une section de PTX au-dessus de V), et ce feuilletage se relève sur U à travers l'isomorphisme $U \xrightarrow{\pi} V$ (les feuilles dans U sont donc les dérivées des feuilles dans V) ; ensuite, ce feuilletage (non singulier) sur un ouvert de Zariski de Z s'étend à un feuilletage (singulier) sur toute la surface Z. Bien sûr, Z peut être singulière, et dans ce cas il vaut mieux la remplacer par sa désingularisation, qu'on notera encore par Z ; le feuilletage $\mathcal{F}$ et la courbe f' se relèvent, évidemment, sur cette désingularisation. Or, le fait que f' soit à valeurs dans Z et que f' soit la dérivée d'une courbe dans X impliquent, tautologiquement, que f' est *tangente* à $\mathcal{F}$. Voici donc démontré le théorème 1.3 (avec $g = f'$).

En principe, ces arguments pourraient être considérablement améliorés. Plutôt que de prendre *une seule* section s de $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ et son diviseur $D = (s = 0)$, il convient d'introduire le *lieu base* $B_m \subset PTX$ de ce même fibré, défini comme l'intersection des lieux d'annulation de *toutes* les sections du fibré. Les arguments qui précèdent montrent alors que $f'(\mathbf{C}) \subset B_m$. Si on a la chance de démontrer que $\dim B_m \leqslant 1$ pour m assez grand, on aura alors une preuve directe du théorème 1.2 qui ne nécessitera pas l'usage des feuilletages. Et si, sous certaines hypothèses, on arrive à montrer que $\dim B_m \leqslant 0$, on aura alors démontré l'hyperbolicité de X (c'est le cas, par exemple, d'une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe négative, car $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ est alors ample et donc $B_m = \varnothing$ pour m assez grand). Mais, malheureusement, le contrôle de ce lieu base B_m est très difficile : le lemme 3.1 garantit que $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(A^*)$ a beaucoup de sections, mais ne dit rien sur les lieux d'annulation de ces sections.

Il y a toutefois un cas particulier où cette approche est effective, grâce à un théorème de Miyaoka [Miy] [LuY] (voir aussi [MQ1] theorem II.0.2.2 et [DEG] theorem 2.3).

LEMME 3.2 (Miyaoka). — *Soit X une surface projective complexe de type général avec $c_1^2(X) > 2c_2(X)$. Soit $Z \subset PTX$ une surface irréductible horizontale. Alors le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z$ est gros.*

Démonstration. — L'argument est proche de celui du lemme 3.1, mais en plus il faut utiliser la semi-stabilité de Ω^1_X et les inégalités qui en découlent [Bog]. Sans perdre de généralité, on peut supposer X minimale, c'est-à-dire K_X numériquement effectif (rappelons qu'un fibré est *numériquement effectif* s'il est de degré positif ou nul sur toute courbe).

Calculons $c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z)$. Le fibré $\mathcal{O}_{PTX}(Z)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{PTX}(m) \otimes \pi^*(L)$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$ (le degré de $Z \to X$) et un certain $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Ce fibré étant effectif, on en déduit que $(\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X) \otimes L$ a une section globale non triviale, i.e. L^* a un morphisme non trivial vers $\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X$. La semi-stabilité de Ω^1_X, et donc de $\mathrm{Sym}^m \Omega^1_X$, donne alors l'inégalité

$$c_1(L) \cdot c_1(X) \leqslant \frac{m}{2} c_1^2(X).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z) &= c_1^2(\mathcal{O}_{PTX}(1))\cdot[c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m))+c_1(\pi^*(L))]\\ &= m(c_1^2(X)-c_2(X))-c_1(X)\cdot c_1(L)\geqslant \frac{m}{2}(c_1^2(X)-2c_2(X))>0.\end{aligned}$$

La formule de Riemann–Roch et la dualité de Serre impliquent que $\mathcal{O}_{PTX}(1)|_Z$ ou bien son dual $\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_Z$ est gros. Mais la deuxième possibilité est exclue, car on obtient aussi

$$c_1(\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_Z)\cdot c_1(\pi^*(K_X)|_Z)=c_1(X)\cdot c_1(L)-mc_1^2(X)\leqslant -\frac{m}{2}c_1^2(X)<0$$

et le produit d'intersection entre un fibré gros et un fibré numériquement effectif, tel que K_X et donc $\pi^*(K_X)|_Z$, ne peut pas être strictement négatif. $\square$

Ce lemme ne dit pas que le lieu base de $\mathcal{O}_{PTX}(m)\otimes\pi^*(A^*)$ est de dimension 1 (au plus), car les sections de ce fibré sur Z ne s'étendent pas nécessairement à toute la variété PTX. Mais les arguments précédents s'appliquent encore sans aucun problème : si $f:\mathbf{C}\to X$ est telle que $f':\mathbf{C}\to PTX$ est à valeurs dans une surface horizontale Z, et si s est une section non triviale de $[\mathcal{O}_{PTX}(m)\otimes\pi^*(A^*)]|_Z$, alors l'image $f'(\mathbf{C})$ est en fait contenue dans la courbe $C=(s=0)$. En effet, on peut considérer Φ' comme courant sur Z, et évidemment $c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m)|_Z)\cdot[\Phi']=c_1(\mathcal{O}_{PTX}(m))\cdot[\Phi']\leqslant 0$, d'où $[\Phi']\cdot[C]<0$. Cela prouve, d'après Lu et Yau [LuY], la conjecture de Green–Griffiths dans le cas $c_1^2>2c_2$.

Pour terminer cette discussion autour du théorème 1.3, rappelons deux résultats de Bogomolov et Vojta qui avaient exploité précédemment les mêmes techniques.

Dans [Bog] (voir aussi [Des]) on montre qu'une surface X de type général avec $c_1^2(X)>c_2(X)$ contient un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques. D'après ce qui précède, ces courbes (qui sont entières...) sont tangentes à un feuilletage, quitte à passer sur un revêtement Z de X. Leur finitude provient alors d'un théorème de Jouanolou [Jou] qui affirme qu'un feuilletage sur une surface possède un nombre fini de feuilles algébriques, sauf dans le cas où le feuilletage est donné par les niveaux d'une fonction rationnelle. Mais dans ce dernier cas on déduit encore la finitude des courbes rationnelles ou elliptiques sur X, car une surface de type général ne possède aucune fibration rationnelle ou elliptique.

Dans [Vo2] on montre qu'une fibration $X\xrightarrow{F}C$, où X est une surface algébrique, C est une courbe algébrique, la fibre générique de F est de genre $\geqslant 2$, et F n'est pas isotriviale, possède un nombre fini de sections (« conjecture de Mordell géométrique », prouvée originairement par Manin et ensuite par beaucoup de monde, voir [Lan] pour une discussion approfondie ; le résultat de Vojta fournit des estimations différentes de celles des résultats antérieurs). La preuve consiste à construire un feuilletage (sur un revêtement...) qui contient ces sections comme feuilles, et ensuite on applique à nouveau le théorème de Jouanolou. La construction du feuilletage est similaire à celle de Bogomolov.

Passons maintenant aux constructions de [DEG] et [MQ2], visant à la conjecture de Kobayashi.

Si X est une hypersurface lisse dans $\mathbf{C}P^3$, de degré $d \geqslant 5$ afin qu'elle soit de type général, le lemme 3.1 ne s'applique pas, car $c_1^2(X) < c_2(X)$ (et, en fait, on peut même montrer que $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ n'est jamais gros dans ce cas). On a toutefois l'inégalité $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$ dès que $d \geqslant 15$, ce qui sera utile dans la suite.

Pour obtenir des équations différentielles satisfaites par les courbes entières dans X il faut prendre en considération les dérivées secondes de ces courbes. Soit donc $J_2 \to X$ le fibré des 2-jets des courbes holomorphes dans X, et soit $E_2 \to X$ le quotient de J_2 par l'action du groupe des 2-jets de difféomorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ (voir [Dm1] ou [DEG] pour plus de détails sur ces fibrés). Il faut penser à E_2 comme étant le fibré des 2-jets des courbes holomorphes « non paramétrées ». On a une $\mathbf{C}P^1$-fibration $E_2 \xrightarrow{\widehat{\pi}} PTX$, induite par 2-jet $\mapsto$ 1-jet, et un fibré tautologique $\mathcal{O}_{E_2}(-1) \in \mathrm{Pic}(E_2)$. On a aussi une fibration $\widetilde{\pi} = \pi \circ \widehat{\pi} : E_2 \to X$. Remarquons que $\dim E_2 = 4$.

LEMME 3.3 ([Dm1]; voir aussi [DEG] et [MQ2]). — *Soit X une surface de type général avec $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$. Alors le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(1)$ est gros.*

La preuve imite celle du lemme 3.1 : on calcule $c_1^4(\mathcal{O}_{E_2}(1))$, qui est positivement proportionnel à $13c_1^2(X) - 9c_2(X)$, ensuite on applique la formule de Riemann–Roch, et la dualité de Serre pour contrôler la cohomologie en degré positif. À noter que la cohomologie de E_2 à coefficients dans $\mathcal{O}_{E_2}(m)$ (y comprise celle en degré 0) s'exprime en termes de celle de X à coefficients dans certains fibrés vectoriels, les fibrés des opérateurs différentiels algébriques du second ordre.

En particulier, sous les hypothèses du lemme 3.3 (satisfaites par les hypersurfaces de degré $\geqslant 15$) le fibré linéaire $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(A^*)$, où $A \in \mathrm{Pic}(X)$ est ample, a des sections holomorphes globales non triviales pour $m \gg 0$. Si $f : \mathbf{C} \to X$ est une courbe entière et $f'' : \mathbf{C} \to E_2$ son relevé, on en déduit que l'image $f''(\mathbf{C})$ est contenue dans une hypersurface $W \subset E_2$, composante irréductible du lieu d'annulation d'une section de $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(A^*)$:

$$f''(\mathbf{C}) \subset W.$$

Cette dernière affirmation est démontrée dans [DEG] comme conséquence du lemme de Ahlfors–Schwarz de [GGr], [Dm1] et [SY2], et dans [MQ2] à l'aide d'une inégalité tautologique pour les dérivées d'ordre supérieur.

Comme dans le cas $c_1^2 > c_2$, on a donc deux situations possibles. Si W est *verticale*, i.e. $\widehat{\pi}(W) \subset PTX$ est une surface Z, on en déduit que $f'(\mathbf{C}) \subset Z$ et donc soit $f(\mathbf{C})$ est dans une courbe $C \subset X$ (si Z est verticale) soit f' est tangente au feuilletage tautologique de Z (si Z est horizontale). Si, par contre, W est *horizontale*, i.e. $\widehat{\pi}(W) = PTX$, on en déduit seulement que f'' est tangente au feuilletage tautologique (par courbes) de W. Puisque $\dim W = 3$ et puisqu'on ne connaît pas grand chose sur les feuilletages en dimension $\geqslant 3$, dans ce deuxième cas il faut des arguments supplémentaires pour se ramener à la dimension 2.

Une démarche naturelle est alors la suivante, inspirée du résultat de [LuY] expliqué ci-dessus : essayer de démontrer que, si $W \subset E_2$ est horizontale, le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(1)|_W$ est encore gros. Cela donnera une surface $\widehat{Z} \subset W$ telle que $f''(\mathbf{C}) \subset \widehat{Z}$, et donc une surface $Z = \widetilde{\pi}(\widehat{Z}) \subset PTX$ telle que $f'(\mathbf{C}) \subset Z$. Si l'on cherche un résultat « général » dans cette direction, avec des hypothèses concernant seulement les nombres de Chern de X, il faudra alors imposer sur $c_1^2(X)$ et $c_2(X)$ une inégalité plus forte que celle qui apparaît dans le lemme 3.3. Dans [DEG] on fait un tel calcul, qui est encore une fois basé sur la semi-stabilité de Ω_X^1, et on trouve que l'inégalité à imposer est $c_1^2(X) > \frac{9}{7}c_2(X)$. Ce résultat « général » n'est pas très utile à ce point, car nous savons déjà construire des feuilletages sur des surfaces sous l'hypothèse plus faible $c_1^2(X) > c_2(X)$...

Toutefois, les hypersurfaces génériques dans $\mathbf{C}P^3$ ont une propriété remarquable : leur groupe de Picard est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (théorème de Noether–Lefschetz). En utilisant cette propriété, Demailly et El Goul parviennent à démontrer que, pour avoir $\mathcal{O}_{E_2}(1)|_W$ gros, il suffit d'une inégalité du type

$$c_1^2(X) > \frac{9}{13 + 12\theta_2} c_2(X),$$

où $\theta_2 = \theta_2(X)$ est l'infimum des nombres rationnels $\frac{l}{m}$ (avec $m \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{Z}$) tels que le fibré $\mathcal{O}_{E_2}(m) \otimes \widetilde{\pi}^*(K_X^{\otimes l})$ a des sections holomorphes globales non triviales. On a $\theta_2 < 0$ car $\mathcal{O}_{E_2}(1)$ est gros, et $\theta_2 > -\infty$ car K_X est gros. Bien sûr, cette inégalité est plus forte que $c_1^2(X) > \frac{9}{13}c_2(X)$. Mais Demailly et El Goul arrivent aussi à donner des estimations sur θ_2 et, enfin, ils montrent par cette voie que l'inégalité $c_1^2(X) > \frac{9}{13+12\theta_2}c_2(X)$ est satisfaite par les hypersurfaces génériques de $\mathbf{C}P^3$ dès que leur degré est $\geqslant 21$.

Tous ces calculs sont assez compliqués, et nous ne pouvons que renvoyer à [DEG] pour les détails. Observons toutefois l'aspect suivant. Prouver une estimation du type « $\theta_2 > \ldots$ » signifie prouver que certains fibrés n'ont aucune section non triviale. Or, si on a une famille (connexe) de surfaces (e.g., la famille des hypersurfaces lisses de $\mathbf{C}P^3$ de degré fixé) il suffit de faire cela dans le cas d'*une seule* surface pour en déduire la même propriété pour toutes les surfaces *génériques* de la famille (théorème de semi-continuité). C'est donc ici que le fait de travailler avec des hypersurfaces de $\mathbf{C}P^3$, et pas avec des surfaces abstraites, se révèle très utile : on choisit une hypersurface spéciale dans $\mathbf{C}P^3$ et on fait les calculs sur elle.

En conclusion, donc, Demailly et El Goul montrent que si $X \subset \mathbf{C}P^3$ est générique de degré $d \geqslant 21$ et si $f : \mathbf{C} \to X$ est une courbe entière, il existe une surface $Z \to X$, un feuilletage $\mathcal{F}$ sur Z, un relevé $g : \mathbf{C} \to Z$ de f sur Z tangent à $\mathcal{F}$. Le théorème 1.4 et le théorème de Clemens [Cle] conduisent alors à la preuve du théorème 1.6 :

X est hyperbolique. Cela se trouve aussi dans [MQ2], suivant le même schéma mais avec des détails qui semblent un peu plus compliqués (d'ailleurs, McQuillan étudie une situation plus générale que celle de la conjecture de Kobayashi).

Terminons cette section avec quelques remarques sur le cas logarithmique.

Soit X une surface projective complexe et soit $D \subset X$ une courbe à croisements normaux. Pour étudier les courbes entières dans $X \setminus D$ il est alors naturel de travailler avec des objets à singularités logarithmiques le long de D. Soit donc $PTX(\log D)$ le fibré tangent logarithmique projectivisé, et soit $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(-1)$ son fibré tautologique.

Comme dans le lemme 3.1, on obtient que si (X, D) est de type log-général (i.e., $K_X \otimes \mathcal{O}_X(D)$ est gros) et si $c_1^2(TX(\log D)) > c_2(TX(\log D))$, alors $\mathcal{O}_{PTX(\log D)}(1)$ est gros. Cela fournit donc un feuilletage sur un revêtement Z de X, et les courbes entières dans $X \setminus D$ se relèvent en feuilles de ce feuilletage. Bien sûr, la proposition 2.1 est ici remplacée par sa version logarithmique 2.2.

Sans surprise, cela ne marche jamais si $X = \mathbf{C}P^2$ et D est une courbe lisse : l'inégalité ci-dessus entre nombres de Chern logarithmiques n'est jamais satisfaite. Il faut à nouveau prendre en compte les dérivées secondes, etc. On trouve tout cela dans [ElG], où l'auteur prouve la deuxième partie de la conjecture de Kobayashi avec $e(2) = 15$. Bien sûr, le théorème 1.4 est, dans ce contexte, remplacé lui aussi par sa version logarithmique.

4. FEUILLES ENTIÈRES

Dans cette section nous expliquerons les idées qui apparaissent dans la preuve du théorème 1.4.

Soit X une surface projective complexe lisse et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X, à singularités isolées. La donnée d'un tel feuilletage équivaut à la donnée d'une suite exacte

$$0 \to N_{\mathcal{F}}^* \to \Omega_X^1 \to \mathcal{I}_S \cdot K_{\mathcal{F}} \to 0$$

où $N_{\mathcal{F}}^*$ et $K_{\mathcal{F}}$ sont des fibrés linéaires sur X (le *fibré conormal* et le *fibré canonique* de $\mathcal{F}$), S est un sous-schéma de X de codimension 2 (le *schéma singulier* de $\mathcal{F}$), et $\mathcal{I}_S$ est son idéal. Plus exactement, $N_{\mathcal{F}}^*$ (resp. $T_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}}^*$) est le fibré linéaire engendré par les 1-formes holomorphes locales (resp. les champs de vecteurs holomorphes locaux) qui définissent $\mathcal{F}$. En prenant le déterminant de la suite exacte ci-dessus, on obtient

$$K_X = K_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}}^*.$$

On peut associer à $\mathcal{F}$ son *graphe* $F \subset PTX$: c'est une surface irréductible, qui coupe chaque fibre de $\pi : PTX \to X$ au-dessus d'un point non singulier x en un seul point v_x (= la droite tangente à $\mathcal{F}$ en x) et qui contient chaque fibre de π au-dessus d'un point singulier. En général, F peut avoir des singularités, au-dessus de certains points singuliers de $\mathcal{F}$.

Remarquons que l'énoncé du théorème 1.4 est invariant par transformations birationnelles : on peut donc faire tous les éclatements qu'on veut. Cela permet, grâce à un théorème classique de Seidenberg [Sei], de supposer que toutes les singularités de $\mathcal{F}$ sont *réduites.* Nous ne voulons pas rentrer ici dans les détails de cette théorie (voir, e.g., [Br2] pour un exposé plus complet), et pour simplifier l'exposition nous allons dans la suite faire les hypothèses suivantes :

i) $\mathcal{F}$ a une seule singularité, p (ce qui évitera l'introduction de trop d'indices) ;

ii) p est une singularité *réduite* et *non dégénérée*, i.e. $\mathcal{F}$ est engendré au voisinage de p par un champ de vecteurs holomorphe dont la partie linéaire en p a valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbf{Q}^+$ (ce qui exclura les singularités de type « nœud-col », qui donnent quelque difficulté technique en plus).

Bien sûr, les deux propositions ci-dessous restent vraies dans le cas général des feuilletages à singularités réduites, voir [MQ1] et [Br1].

Le graphe $F \subset PTX$ contient la fibre $E = \pi^{-1}(p)$, et l'hypothèse ii) implique que F est lisse au voisinage de E (et donc partout). En fait, la projection $\pi : F \to X$ s'identifie à l'éclatement de X en p et $E \subset F$ est son diviseur exceptionnel. La restriction du fibré tautologique $\mathcal{O}_{PTX}(-1)$ à F coïncide avec $\pi^*(T_\mathcal{F})$ hors de E (par tautologie) et avec $\mathcal{O}_F(E)$ le long de E (car $\deg(\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_E) = -1 = \deg(\mathcal{O}_F(E)|_E)$). C'est-à-dire :

$$\mathcal{O}_{PTX}(-1)|_F = \pi^*(T_\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_F(E).$$

Soit $f : \mathbf{C} \to X$ une *feuille entière* de $\mathcal{F}$, i.e. une courbe entière tangente à $\mathcal{F}$. La dérivée $f' : \mathbf{C} \to PTX$ est donc à valeurs dans F. Si $\Phi' \in A^{1,1}(PTX)'$ est un courant positif fermé associé à f' (qu'on peut aussi identifier à un courant sur F), l'inégalité tautologique (proposition 2.1) donne alors l'inégalité

$$c_1(\pi^*(T_\mathcal{F})) \cdot [\Phi'] + [\Phi'] \cdot [E] \geqslant 0$$

i.e.

$$c_1(T_\mathcal{F}) \cdot [\Phi] \geqslant -[\Phi'] \cdot [E]$$

où $\Phi = \pi_*(\Phi')$ est un courant positif fermé associé à f. Notons que $[\Phi'] \cdot [E] \geqslant 0$, car $f'(\mathbf{C}) \not\subset E$. Le résultat suivant de McQuillan est alors une amélioration significative de l'inégalité ci-dessus.

Proposition 4.1 ([MQ1], theorem II.3.3.2). — *Si $f(\mathbf{C})$ est Zariski-dense dans X, on a*

$$c_1(T_\mathcal{F}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que f ne passe pas par p : $f(\mathbf{C}) \cap \{p\} = \varnothing$ (mais, bien sûr, p peut être dans $\operatorname{Supp} \Phi$, sinon tout est trivial).

Soit alors $X^{(1)} \overset{\pi^{(1)}}{\to} X$ l'éclaté de X en p, $E^{(1)} \subset X^{(1)}$ le diviseur exceptionnel, $f^{(1)} : \mathbf{C} \to X^{(1)}$ le relevé de f. Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève en un feuilletage $\mathcal{F}^{(1)}$ sur $X^{(1)}$, tangent à $E^{(1)}$. On peut donc considérer son *graphe logarithmique* $F^{(1)} \subset PTX^{(1)}(\log E^{(1)})$. Or, $\mathcal{F}^{(1)}$ a deux singularités $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ sur $E^{(1)}$, qui sont encore réduites et non dégénérées. Mais du point de vue logarithmique, ces deux points $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$ *ne sont pas* singuliers : si v est un champ de vecteurs holomorphe local qui engendre $\mathcal{F}^{(1)}$ au voisinage de $p^{(1)}$, alors v s'annule en $p^{(1)}$ en tant que section de $TX^{(1)}$, mais il ne s'annule pas en tant que section de $TX^{(1)}(\log E^{(1)})$. Cela signifie que le graphe $F^{(1)}$ est une section de $PTX^{(1)}(\log E^{(1)})$ même au-dessus de $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$, et donc partout. On obtient alors la formule tautologique

$$\mathcal{O}_{PTX^{(1)}(\log E^{(1)})}(-1)|_{F^{(1)}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}^{(1)}}).$$

Notons, à ce propos, que le « fibré tangent logarithmique » du feuilletage $\mathcal{F}^{(1)}$ coïncide avec son fibré tangent ordinaire $T_{\mathcal{F}^{(1)}}$, puisqu'un champ de vecteurs local qui engendre le feuilletage est forcément logarithmique, i.e. tangent à $E^{(1)}$. Par contre, le « fibré conormal logarithmique » de $\mathcal{F}^{(1)}$ est égal à $N^*_{\mathcal{F}^{(1)}} \otimes \mathcal{O}_{X^{(1)}}(E^{(1)})$ et diffère donc du fibré conormal ordinaire.

La feuille entière $f^{(1)} : \mathbf{C} \to X^{(1)}$ a son image disjointe de $E^{(1)}$, on peut donc lui appliquer l'inégalité tautologique logarithmique (proposition 2.2), ce qui donne

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(1)}}) \cdot [\Phi^{(1)}] \geqslant 0$$

où $\Phi^{(1)}$ est un courant positif fermé associé à $f^{(1)}$. On peut supposer que $\Phi^{(1)}$ se projette sur Φ par $\pi^{(1)}$, et d'autre part $T_{\mathcal{F}^{(1)}}$ coïncide avec $(\pi^{(1)})^*(T_{\mathcal{F}})$ car p est réduite. On obtient ainsi l'inégalité cherchée :

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Le cas général, où f passe par p, nécessite une « suite infinie » d'éclatements. On peut faire à nouveau la construction précédente, mais alors $f^{(1)}(\mathbf{C})$ n'est plus disjointe de $E^{(1)}$ car elle peut contenir $p^{(1)}$ et/ou $q^{(1)}$. Il faut donc éclater $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$, en obtenant une surface $X^{(2)}$, une projection $X^{(2)} \overset{\pi^{(2)}}{\to} X$ avec $E^{(2)} = (\pi^{(2)})^{-1}(p) =$ chaîne de trois courbes rationnelles, un feuilletage $\mathcal{F}^{(2)}$ tangent à $E^{(2)}$ et une feuille entière $f^{(2)} : \mathbf{C} \to X^{(2)}$. Le feuilletage $\mathcal{F}^{(2)}$ est singulier aux points de croisement de $E^{(2)}$ et, en plus, en deux points $p^{(2)}$ et $q^{(2)}$, qui se trouvent aux extrémités de $E^{(2)}$ et qui sont susceptibles d'être dans l'image de $f^{(2)}$. On éclate $p^{(2)}$ et $q^{(2)}$, on itère la construction, et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on obtient ainsi une surface $X^{(n)} \overset{\pi^{(n)}}{\to} X$, une chaîne de $(2n-1)$ courbes rationnelles $E^{(n)} = (\pi^{(n)})^{-1}(p)$, un feuilletage $\mathcal{F}^{(n)}$ tangent à $E^{(n)}$, une feuille entière $f^{(n)} : \mathbf{C} \to X^{(n)}$, et deux singularités $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$ aux extrémités de $E^{(n)}$.

Soit alors $D^{(n)} \subset X^{(n)}$ la chaîne de $(2n-3)$ courbes rationnelles qui s'obtient de $E^{(n)}$ en ôtant les deux courbes rationnelles extrémales. On a $f^{(n)}(\mathbf{C}) \cap D^{(n)} = \varnothing$, et on peut maintenant appliquer l'inégalité tautologique logarithmique à

$f^{(n)} : \mathbf{C} \to X^{(n)} \setminus D^{(n)}$. Du point de vue logarithmique (à pôles sur $D^{(n)}$) $\mathcal{F}^{(n)}$ est singulier *seulement* en $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$. On obtient ainsi l'inégalité

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] \geqslant -[(\Phi^{(n)})'] \cdot ([E_{p^{(n)}}] + [E_{q^{(n)}}])$$

où $E_{p^{(n)}}$ et $E_{q^{(n)}}$ sont les fibres de $PTX^{(n)}(\log D^{(n)})$ au-dessus de $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$, fibres contenues dans le graphe logarithmique de $\mathcal{F}^{(n)}$. Puisque $T_{\mathcal{F}^{(n)}} = (\pi^{(n)})^*(T_{\mathcal{F}})$ et $\pi_*^{(n)}(\Phi^{(n)}) = \Phi$, on a

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant -[(\Phi^{(n)})'] \cdot ([E_{p^{(n)}}] + [E_{q^{(n)}}]).$$

D'autre part, un calcul simple (voir [Br1] page 206) montre que

$$[\Phi^{(n)}]^2 = [\Phi]^2 - ([\Phi'] \cdot [E])^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \{([(\Phi^{(j)})'] \cdot [E_{p^{(j)}}])^2 + ([(\Phi^{(j)})'] \cdot [E_{q^{(j)}}])^2\}.$$

C'est à ce point que l'hypothèse de Zariski-densité de f (et donc de $f^{(n)}$ pour tout n) intervient : cette hypothèse implique que les classes des courants $\Phi^{(n)}$ sont numériquement effectives, et par conséquent $[\Phi^{(n)}]^2 \geqslant 0$. La somme $\sum_{j=1}^{n-1}\{\ldots\}$ ci-dessus est donc majorée, pour tout n, par $[\Phi]^2$. Cela implique que $[(\Phi^{(n)})'] \cdot [E_{p^{(n)}}]$ et $[(\Phi^{(n)})'] \cdot [E_{q^{(n)}}]$ (qui sont positifs ou nuls) tendent vers 0 pour $n \to +\infty$. L'inégalité

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$$

s'obtient alors par passage à la limite. □

Remarque. — Comme les propositions 2.1 et 2.2, la proposition 4.1 est vraie à condition de considérer, dans la construction du courant Φ, une « bonne » suite divergente $\{r_n\}$, c'est-à-dire une suite qui produit des courants positifs fermés $\Phi^{(k)}$, $(\Phi^{(k)})'$, $k \in \mathbf{N}$, satisfaisant les inégalités tautologiques correspondantes. Même si on a fait une « suite infinie » d'éclatements, il n'y a aucun problème pour l'existence de telles suites.

À côté de la proposition 4.1, qui estime $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, on a la proposition suivante, qui estime $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$. Nous suivrons ici [Br1], qui donne un résultat un peu meilleur que celui de [MQ1] et qui permettra donc d'abréger la conclusion de la preuve du théorème 1.4.

PROPOSITION 4.2 ([Br1], théorème 2). — *Si $f(\mathbf{C})$ est Zariski-dense dans X, on a*

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0.$$

Démonstration. — On a déjà observé dans la section 2 que, bien que f soit Zariski-dense, le courant Φ peut contenir le courant d'intégration sur une courbe algébrique. Dans la suite, pour simplifier, on va supposer que Φ ne contient pas de telle composante (voir [Br1] pour le cas général, qui demande simplement des arguments logarithmiques). Cela revient à dire que les nombres de Lelong de Φ hors des singularités de $\mathcal{F}$ sont nuls.

Le produit $c_1(N_{\mathcal{F}})\cdot[\Phi]$ est égal à $\Phi(\Omega)$, où Ω est une 2-forme fermée qui représente $c_1(N_{\mathcal{F}})$. On va donc construire une telle 2-forme, en suivant les idées de Baum et Bott [BBo]. Remarquons que le fibré $N_{\mathcal{F}}$ est, hors de la singularité p, plat le long des feuilles de $\mathcal{F}$. Cela permet de construire une 2-forme fermée Ω telle que $[\Omega]=c_1(N_{\mathcal{F}})$ et $\Omega|_{\mathcal{F}}\equiv 0$ hors d'un voisinage U de p. Un calcul standard (voir, e.g., [Br1] ou [Br2] chapter 3) donne aussi la recette suivante pour $\Omega|_{\mathcal{F}}$ dans U. Soit ω une 1-forme holomorphe locale qui engendre $\mathcal{F}$ dans U et soit β une $(1,0)$-forme C^∞ sur U telle que $d\omega=\beta\wedge\omega$ dans $U\setminus V$, où $V\subset\subset U$ est un autre voisinage de p. Une telle β existe toujours (voir ci-dessous) ; en général, on ne peut pas la choisir holomorphe. On peut alors supposer que

$$\Omega|_{\mathcal{F}}=\frac{1}{2i\pi}d\beta|_{\mathcal{F}}$$

dans U. Remarquons que $d\beta|_{\mathcal{F}}\equiv 0$ dans $U\setminus V$, car $d\omega=\beta\wedge\omega \implies d\beta\wedge\omega\equiv 0$, et donc $\mathrm{Supp}(\Omega|_{\mathcal{F}})\subset\overline{V}\subset\subset U$. Remarquons aussi que, une fois fixé ω, la restriction $\beta|_{\mathcal{F}}$ est uniquement définie dans $U\setminus V$; et si on remplace ω par $F\cdot\omega$, $F\in\mathcal{O}^*(U)$, la restriction $\beta|_{\mathcal{F}}$ est remplacée par $(\beta+\frac{dF}{F})|_{\mathcal{F}}$. On peut donc dire que la « classe de cohomologie relative » de $\beta|_{\mathcal{F}}$ dans $U\setminus V$ est intrinsèquement définie par $\mathcal{F}$.

La valeur de Φ sur une 2-forme η dépend seulement de $\eta|_{\mathcal{F}}$, car $\Phi(\eta)$ se calcule en intégrant η sur la feuille $f:\mathbf{C}\to X$. Puisque $\Omega|_{\mathcal{F}}\equiv 0$ hors de U, on a ainsi localisé le calcul : $\Phi(\Omega)$ est égal à $\Phi_U(\frac{1}{2i\pi}d\beta)$, où Φ_U est la restriction de Φ à U (ou, si l'on préfère, $\Phi_U=\chi_U\cdot\Phi$). On peut toujours supposer que U est une boule autour de p et β est définie au voisinage de $\overline{U}$. On a alors

$$\Phi(\Omega)=\Phi_U(\tfrac{1}{2i\pi}d\beta)=\Psi(\tfrac{1}{2i\pi}\beta)$$

où $\Psi\in A^1(\partial U)'$ est le courant bord de Φ_U (ou, si l'on préfère, $\Psi=d\chi_U\wedge\Phi$). Dorénavant on supposera que $p\in\mathrm{Supp}\,\Phi$, sinon on a trivialement $\Phi(\Omega)=0$.

Pour fixer les idées, supposons que $\mathcal{F}$ soit linéarisable au voisinage de p, i.e. engendré par la 1-forme

$$\omega=zdw-\lambda wdz$$

avec $\lambda\neq 0$, $\lambda\notin\mathbf{Q}^+$ (car p est réduite et non dégénérée). Supposons aussi que $\lambda\notin\mathbf{R}^-$ (voir [Br1] pour le cas $\lambda\in\mathbf{R}^-$, qui est en effet un peu plus délicat). Alors, quitte à restreindre U, la 3-sphère ∂U est transverse à $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ induit sur ∂U un feuilletage non singulier réel $\mathcal{L}$ de dimension 1, *orienté* par $\mathcal{F}|_U$:

$$\mathcal{L}=\partial(\mathcal{F}|_U).$$

Le courant Φ est associé à une *mesure transverse* à $\mathcal{F}$, invariante par holonomie [Sul] : la valeur de Φ sur η se calcule en intégrant η le long des feuilles et ensuite en intégrant la fonction ainsi obtenue (sur l'espace des feuilles) par rapport à la mesure transverse. Cette mesure transverse à $\mathcal{F}$ induit une mesure transverse à $\mathcal{L}$, invariante par holonomie. Et, réciproquement, cette dernière est associée à un courant $\widehat{\Psi}$ sur ∂U, de degré 1 ($= \dim \mathcal{L}$), positif (i.e. $\widehat{\Psi}(\gamma) > 0$ si $\gamma|_{\mathcal{L}} > 0$), fermé. Bien sûr, ce courant $\widehat{\Psi}$ coïncide avec le bord Ψ de Φ_U introduit ci-dessus : $\widehat{\Psi} = \Psi$.

L'hypothèse d'annulation des nombres de Lelong de Φ hors de p se traduit dans l'absence d'atomes pour les mesures transverses en jeu. Cela permet d'exclure le cas $\lambda \notin \mathbf{R}$. En effet, dans ce cas le flot $\mathcal{L}$ a deux orbites périodiques ($\{z = 0\} \cap \partial U$ et $\{w = 0\} \cap \partial U$) et toute autre orbite a ces deux orbites comme ensemble limite, ce qui force toute mesure transverse invariante à être concentrée sur ces deux orbites et donc à être atomique. On a donc $\lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+$.

Pour ce qui concerne la $(1,0)$-forme β, on peut choisir

$$\beta = h \cdot \frac{1+\lambda}{|z|^2 + |\lambda w|^2}(\overline{z}dz + \overline{\lambda}\overline{w}dw)$$

où $h \in C^\infty(\overline{U})$, $h \equiv 0$ au voisinage de p, $h \equiv 1$ sur $\overline{U} \setminus V$. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\beta|_{\mathcal{L}} = \frac{(1+\lambda)}{2\pi i}\frac{dz}{z}|_{\mathcal{L}} > 0$$

et par conséquent $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) > 0$.

Le cas $\lambda \in \mathbf{R}^-$ conduit par contre à $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) = 0$, voir [Br1]. En tout cas on a donc $\Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = \Psi(\frac{1}{2i\pi}\beta) \geqslant 0. \qquad \square$$

Grâce aux propositions 4.1 et 4.2, la preuve du théorème 1.4 est maintenant immédiate. En effet, d'après $K_X = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}$ on obtient

$$c_1(K_X) \cdot [\Phi] \leqslant 0$$

pour tout courant Φ associé à une feuille entière Zariski-dense d'un feuilletage à singularités réduites. Mais la classe $[\Phi]$ est numériquement effective et non triviale, et donc

$$c_1(L) \cdot [\Phi] > 0$$

pour tout fibré gros $L \in \mathrm{Pic}(X)$ (c'est une conséquence du théorème de l'indice de Hodge). Ainsi K_X n'est pas gros, i.e. X n'est pas de type général.

Dans [MQ1] la conclusion de la preuve est un peu plus élaborée, car on dispose seulement d'une version « faible » de la proposition 4.2. Grosso modo, cette version faible permet de conclure qu'on a l'inégalité de la proposition 4.2 si $[\Phi]^2 = 0$. Si par contre $[\Phi]^2 > 0$, McQuillan fait appel à un théorème de Miyaoka [ShB] qui affirme que le fibré canonique d'un feuilletage non réglé est pseudo-effectif (sa classe dans $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbf{R}$ est dans la clôture du cône effectif). Dans notre situation, cela donne en particulier l'inégalité $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \leqslant 0$, car $[\Phi]$ est numériquement effective, et donc

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = 0.$$

Ensuite, des techniques standard en géométrie des surfaces (théorème de l'indice de Hodge, décomposition de Zariski des diviseurs,...) montrent (grâce à : $[\Phi]$ numériquement effective, $[\Phi]^2 > 0$, $K_{\mathcal{F}}$ pseudo-effectif, $c_1(K_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] = 0$) que $T_{\mathcal{F}}$ est « presque » trivial, i.e. $\mathcal{F}$ est « presque » engendré par un champ de vecteurs holomorphe global. Cela implique à nouveau que X n'est pas de type général, essentiellement parce qu'une surface de type général ne possède aucun champ de vecteurs holomorphe global.

D'ailleurs, tout cela a été le point de départ d'un travail postérieur de McQuillan [MQ3] (voir aussi [Br2]) dans lequel on classifie les feuilletages $\mathcal{F}$ des surfaces projectives tels que $K_{\mathcal{F}}$ n'est pas gros, ce qui en particulier contient la classification des feuilletages ayant une feuille entière Zariski-dense, grâce à la proposition 4.1. À vrai dire, à l'heure actuelle cette classification des feuilletages avec fibré canonique non gros présente encore une lacune (le cas « dimension de Kodaira $-\infty$ »), mais cette lacune est remplissable dans le cas spécial des feuilletages avec une feuille entière Zariski-dense (en utilisant la proposition 4.2, ou sa version faible dans [MQ1]).

Il serait évidemment de grand intérêt de généraliser ces résultats, même partiellement, en dimension supérieure. Dans l'étude de la conjecture de Green–Griffiths pour les surfaces X de type général, on rencontre la situation suivante : une n-variété projective Y, une projection surjective $\pi : Y \to X$, un feuilletage par courbes $\mathcal{F}$ sur Y, et une feuille entière $f : \mathbf{C} \to Y$. On voudrait démontrer que $\pi \circ f : \mathbf{C} \to X$ n'est pas Zariski-dense. Si, par contradiction, elle l'était, on aurait alors $c_1(\pi^*(K_X)) \cdot [\Phi] > 0$. D'autre part, $\pi^*(K_X)$ se décompose comme $K_{\mathcal{F}} \otimes L^*_{\mathcal{F},\pi}$, où $L_{\mathcal{F},\pi}$ est, grosso modo, le quotient du fibré normal à $\mathcal{F}$ par le fibré tangent à $\operatorname{Ker} \pi$. Il semble encore possible de démontrer une inégalité du type $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$, à éclatements près, à partir de l'inégalité tautologique. Par contre, une inégalité du type $c_1(L_{\mathcal{F},\pi}) \cdot [\Phi] \geqslant 0$ semble plus difficile à prouver. Un obstacle dans tout ça est dû à l'absence d'un théorème de résolution des singularités des feuilletages en dimension $\geqslant 3$. Notons toutefois que, dans le cas bidimensionnel, la proposition 4.2 reste vraie sans aucune hypothèse sur les singularités de $\mathcal{F}$, moyennant une faible hypothèse sur les singularités de $[\Phi]$ (voir [Br2] chapter 3).

RÉFÉRENCES

[Ahl] L. AHLFORS – *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math. 65 (1935).

[BBo] P. BAUM, R. BOTT – *On the zeroes of meromorphic vector fields*, Essais en l'honneur de De Rham, Springer Verlag (1970), 29-74.

[Bog] F. BOGOMOLOV – *Families of curves on a surface of general type*, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 1294-1297.

[Br1] M. BRUNELLA – *Courbes entières et feuilletages holomorphes*, Ens. Math. 45 (1999), 195-216.

[Br2] M. BRUNELLA – *Birational geometry of foliations*, Congr. UMALCA, notas de curso, IMPA (2000).

[Cle] H. Clemens – *Curves on generic hypersurfaces*, Ann. Sci. ENS 19 (1986), 629-636.

[Dm1] J.-P. Demailly – *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Symp. Pure Math. 62 (1997), 285-360.

[Dm2] J.-P. Demailly – *Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques*, Gazette des math. 73 (1997), 3-23.

[DEG] J.-P. Demailly, J. El Goul – *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math. 122 (2000), 515-546.

[Des] M. Deschamps – *Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général (d'après F. Bogomolov)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 519 (juin 1978), Lecture Notes in Math. 710 (1979), 233-247.

[ElG] J. El Goul – *Logarithmic jets and hyperbolicity*, prépublication Toulouse III (2001).

[GGr] M. Green, Ph. Griffiths – *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Springer Verlag (1980), 41-74.

[Jou] J.-P. Jouanolou – *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Ann. 332 (1978), 239-248.

[Kob] S. Kobayashi – *Hyperbolic complex spaces*, Springer Verlag (1998).

[Lan] S. Lang – *Survey of diophantine geometry (Number Theory III)*, EMS vol. 60, Springer Verlag (1991).

[LuY] S.S.Y. Lu, S.T. Yau – *Holomorphic curves in surfaces of general type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 87 (1990), 80-82.

[MQ1] M. McQuillan – *Diophantine approximations and foliations*, Publ. IHES 87 (1998), 121-174.

[MQ2] M. McQuillan – *Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds*, Geom. funct. anal. 9 (1999), 370-392.

[MQ3] M. McQuillan – *Noncommutative Mori theory*, prépubl. IHES M/00/15 (2000).

[Miy] Y. Miyaoka – *Algebraic surfaces of positive index*, Classification of algebraic and analytic manifolds, Progr. in Math. 39, Birkhäuser (1983), 281-301.

[Sei] A. Seidenberg – *Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$*, Amer. J. Math. 89 (1968), 248-269.

[ShB] N.I. Shepherd-Barron – *Miyaoka's theorems on the generic seminegativity of T_X and on the Kodaira dimension of minimal regular threefolds*, Flips and abundance for algebraic threefolds, Astérisque 211 (1992), 103-114.

[SY1] Y.T. Siu, S.K. Yeung – *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Inv. Math. 124 (1996), 573-618.

[SY2] Y.T. Siu, S.K. Yeung – *Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degree*, Amer. J. Math. 119 (1997), 1139-1172.

[Sul] D. Sullivan – *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Inv. Math. 36 (1976), 225-255.

[Vo1] P. VOJTA – *On the ABC conjecture and diophantine approximations by rational points*, Amer. J. Math. 122 (2000), 843-872.

[Vo2] P. VOJTA – *On algebraic points on curves*, Comp. Math. 78 (1991), 29-36.

[XuG] G. XU – *Subvarieties of general hypersurfaces in projective space*, J. Diff. Geom. 39 (1994), 139-172.

[Zai] M. ZAIDENBERG – *The complement of a generic hypersurface of degree $2n$ in $\mathbf{C}P^n$ is not hyperbolic*, Siberian Math. J. 28 (1987), 425-432.

Marco BRUNELLA

Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
UMR 5584 du CNRS
9, Avenue Savary - BP 47870
F-21078 Dijon
E-mail : brunella@satie.u-bourgogne.fr