Комплексные многообразия, весна 2011: задачи для экзамена

Чтобы получить зачет по разделу, надо решить не меньше половины задач (по сумме баллов). Оценка экзамена вычисляется по формуле $5-k$, где k – число несданных разделов. Сдавать задачи устно, но иметь с собой все решения (по всем подлежащим сдаче разделам) в записанном виде, быть готовым отвечать на вопросы.

18.1. Группы голономий (8 баллов)

Задача 18.1. Пусть M – трехмерное ориентированное риманово многообразие, а $x, y \longrightarrow x\times y$ – векторное произведение в TM. Предположим, что на M задан нигде не зануляющееся векторное поле ζ, такое, что $\nabla_x\zeta = x\times\zeta$. Найдите группу голономий M. Найдите компактное многообразие с таким векторным полем.

Задача 18.2. Предположим, что на римановом многообразии (M, g) задано векторное поле $\zeta \in TM$ такое, что $\nabla\zeta = \mathsf{Id} \in \operatorname{End} TM = TM \otimes \Lambda^1 M$. Докажите, что $\operatorname{Lie}_\zeta g = \lambda g$, для какой-то константы λ. Найдите λ.

Задача 18.3 (2 балла). Докажите, что $\operatorname{Hol}(\mathbb{H}P^n) \subset Sp(1)\cdot Sp(n)$.

Задача 18.4 (2 балла). Докажите, что $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}P^n) = U(n)$ (и не меньше)

Задача 18.5. Докажите, что $\operatorname{Hol}(S^n) = SO(n)$ (и не меньше), для $n \geqslant 2$.

Задача 18.6. Пусть $\eta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)$. Получите оценку на размерность стабилизатора η:

$$\dim \operatorname{St}_{GL(7)}(\eta) \geqslant 14.$$

Назовем 3-форму **невырожденной**, если $\dim \operatorname{St}_{GL(7)}(\eta) = 14$. Докажите, что невырожденные 3-формы лежат на открытых орбитах $GL(7)$ в $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)$. Докажите, что есть по крайней мере 2 такие орбиты.

18.2. Уравнение Монжа-Ампера (6 баллов)

Определение 18.1. Сильно положительная форма есть вещественная (p, p)-форма, полученная как линейная комбинация произведений неотрицательно определенных эрмитовых форм с положительными коэффициентами, **слабо положительная форма** есть вещественная (p, p)-форма, удовлетворяющая $\eta(\zeta_1, I(\zeta_1), ..., \zeta_k, I(\zeta_k)) \geqslant 0$ для любого набора из k векторов $\zeta_i \in TM$.

Определение 18.2. Пусть V – векторное пространство, а $K \subset V$ выпуклый конус, т.е. выпуклое подмножество, которое сохраняется гомотетиями с положительным коэффициентом, а $g: V\times V' \longrightarrow \mathbb{R}$ – невырожденное спаривание. Конус $K' \subset V'$ называется **двойственным** к K, если

$$x \in K \Leftrightarrow \forall y \in K', \quad g(x, y) \geqslant 0$$

Задача 18.7. Пусть M – компактное комплексное многообразие Рассмотрим спаривание $\Lambda^{p,p}M\times\Lambda^{n-p,n-p}M$, $\alpha,\beta\longrightarrow\int_M\alpha\wedge\beta$. Докажите, что конус слабо положительных форм двойственный к конусу сильно положительных.

Задача 18.8 (2 балла). Найдите слабо положительную (2,2)-форму на 4-мерном комплексном многообразии, которая не сильно положительна.

Задача 18.9. Пусть (M,I,ω) – компактное n-мерное эрмитово многообразие, а ϕ – гладкая функция, такая, что $\omega_1:=\omega+dd^c\phi$ – тоже эрмитова форма, причем $\omega_1^n=C\omega^n$, для какой-то константы $C\in\mathbb{R}$. Докажите, что $C=1$.

Задача 18.10 (2 балла). Пусть T^n – компактный тор, с плоской связностью и плоской метрикой g, f – гладкая функция, а $\operatorname{Hess} f$ – ее гессиан, который мы рассматриваем как 2-форму на T. Предположим, что $g_1:=g+\operatorname{Hess} f$ тоже риманова метрика, причем соответствующие формы риманова объема равны: $\operatorname{Vol}(g)=\operatorname{Vol}(g')$. Докажите, что $f=const$.

18.3. Алгебры Клиффорда и спинорное представление (7 баллов)

Определение 18.3. Простая алгебра есть алгебра, не имеющая нетривиальных двусторонних идеалов.

Задача 18.11. Пусть k – поле, $\operatorname{char} k\neq 2$, а V – векторное пространство над k с невырожденной билинейной симметрической формой. Докажите, что $\mathcal{C}\ell(V)$ есть простая алгебра, либо сумма двух таких алгебр.

Задача 18.12. Постройте изоморфизм $\operatorname{Spin}(5)\cong Sp(2)$.

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом $\mathcal{C}\ell(5)=\operatorname{Mat}(2,\mathbb{H})\oplus\operatorname{Mat}(2,\mathbb{H})$.

Задача 18.13. Постройте изоморфизм $\operatorname{Spin}(6)\cong SU(4)$.

Указание. Постройте вещественную структуру и метрику на шестимерном пространстве $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, и докажите, что $SU(4)$ накрывает соответствующую группу автоморфизмов $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$.

Определение 18.4. G_2 (компактная форма) есть группа автоморфизмов октавной алгебры.

Задача 18.14. Пусть V – фундаментальное (семимерное) представление G_2, а $v\in V$ – ненулевой вектор. Докажите, что $\operatorname{St}_{G_2}(v)=SU(3)$.

Задача 18.15 (3 балла). Пусть S – спинорное представление $\operatorname{Spin}(7)$, а $\psi\in S$ – ненулевой вектор. Докажите, что стабилизатор $\operatorname{St}_{\operatorname{Spin}(7)}(\psi)$ изоморфен G_2

18.4. Оператор Дирака (8 баллов)

Определение 18.5. Пусть S – **расслоение Дирака**, то есть расслоение клиффордовых модулей над римановым многообразием, снабженное метрикой h и ортогональной связностью, которые удовлетворяют следующим условиям: $h(e\cdot x, e\cdot y) = |e|^2 h(x,y)$, и

$$\nabla_z(v\cdot x) = v\cdot\nabla_z x + \nabla_z v\cdot x,$$

где $TM\cdot S \longrightarrow S$ - клиффордово умножение. В такой ситуации на S определен оператор Дирака D, обычным образом. **Твисторный спинор** есть спинор $\psi\in S$, который удовлетворяет $\nabla_X\psi + \frac{1}{n}X\cdot D(\psi) = 0$, для любого векторного поля $X\in TM$.

Задача 18.16. Рассмотрим операцию коумножения $S \xrightarrow{\mu} S\otimes TM$, двойственную клиффордову умножению. Докажите, что ψ – твисторный спинор тогда и только тогда, когда $\mu(D\psi) = -n\nabla\psi$.

Задача 18.17. Докажите, что для любого твисторного спинора ψ, и вектора $X\in TM$ единичной длины, спинор $X\cdot\nabla_X\psi$ не зависит от выбора X.

Задача 18.18 (2 балла). Докажите, что любой твисторный спинор удовлетворяет уравнению $D^2\psi = \frac{1}{4}R\frac{n}{n+1}\psi$, где R есть гауссова кривизна M.

Задача 18.19. Пусть M – риманово многообразие, $\dim M = 4$. Докажите, что голономия M лежит в $SU(2)$ тогда и только тогда, когда на M существует ненулевой параллельный спинор.

Задача 18.20 (3 балла). Пусть M – риманово 7-мерное многообразие. Докажите, что голономия M лежит в G_2 тогда и только тогда, когда на M существует ненулевой параллельный спинор.

18.5. Многообразия Калаби-Яу (5 баллов)

Задача 18.21. Пусть Ω – ненулевая (3,0)-форма на трехмерном комплексном пространстве V, а $\mathsf{Re}\,\Omega$ – ее вещественная часть. Докажите, что связная компонента стабилизатора $Re\Omega$ в $GL(6,\mathbb{R})$ изоморфен $SL(3,\mathbb{C})$.

Задача 18.22. Приведите пример компактного кэлерова многообразия с нулевой скалярной кривизной и нетривиальной кривизной Риччи.

Задача 18.23. Пусть M – (компактное) многообразие Калаби-Яу с $H^{\mathsf{odd},0}(M) = 0$, M_1 – комплексное многообразие, а $M \longrightarrow M_1$ – нетривиальное неразветвленное накрытие, причем эйлерова характеристика M – простое число. Докажите, что M проективно.

Задача 18.24 (2 балла). Пусть M – компактное, неалгебраическое голоморфно симплектическое кэлерово многообразие, $H^{2,0}(M)$ одномерно, а ϕ – его автоморфизм конечного порядка. Докажите, что ϕ – симплектоморфизм, то есть сохраняет голоморфную симплектическую структуру.