Комплексные многообразия 11: кэлеровы многообразия и голономия

Задача 11.1. Придумайте пример ориентированного риманова многообразия, у которого локальная голономия не равна глобальной.

Задача 11.2. Найдите все двумерные, компактные римановы многообразия с тривиальной голономией.

Задача 11.3. Найдите двумерное, компактное многообразие, группа голономий которого конечна.

Задача 11.4. Найдите двумерное, компактное риманово многообразие с несвязной, бесконечной группой голономий.

Определение 11.1. Симметрическое многообразие есть риманово многообразие M, снабженное набором изометрий i_x, для любой точки $x \in M$. При этом i_x сохраняет x, является инволюцией, а на T_xM действует как -1.

Задача 11.5. Докажите, что группа изометрий симметрического многообразия действует на нем транзитивно.

Определение 11.2. Кососимметричная 2-форма на векторном пространстве V называется **невырожденной**, если она симплектична. Для $i > 2$, i-форма ρ называется **невырожденной**, если для каждого нигде не зануляющегося векторного поля X, контракция ρ с X[1] невырождена на факторе $V/\langle X\rangle$.

Задача 11.6. Найдите все i, n, для которых на n-мерном пространстве есть невырожденные i-формы.

Задача 11.7. Пусть на $\mathbb{R}^7$ задана невырожденная кососимметричная 3-форма. Найдите размерность ее стабилизатора в $GL(7)$.

Задача 11.8. Пусть на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы три 2-формы Ω_1, Ω_2, Ω_3, причем любая ненулевая линейная комбинация Ω_i невырождена. Докажите, что n делится на 4, а стабилизатор этих трех форм в $GL(n)$ изоморфен $Sp(n) = SU(\mathbb{H}, n)$.

Задача 11.9. Пусть M – псевдориманово многообразие сигнатуры (p, q) (многообразие с невырожденной билинейной симметрической формой g сигнатуры (p, q)). Докажите, что на M существует и единственна связность без кручения, сохраняющая g (такая связность называется **связность Леви-Чивита**).

Задача 11.10. Пусть M – псевдориманово многообразие сигнатуры (p, q), $p \neq q$, а голономия связности Леви-Чивита приводима. Докажите, что M локально разлагается в произведение псевдоримановых многообразий меньшей размерности.

[1]**Контракцией** формы ρ с векторным полем X называется форма $\rho(X, \cdot, \cdot, ..., \cdot)$.