

## Комплексные многообразия 11: кэлеровы многообразия и голономия

**Задача 11.1.** Придумайте пример ориентированного риманова многообразия, у которого локальная голономия не равна глобальной.

**Задача 11.2.** Найдите все двумерные, компактные римановы многообразия с тривиальной голономией.

**Задача 11.3.** Найдите двумерное, компактное многообразие, группа голономий которого конечна.

**Задача 11.4.** Найдите двумерное, компактное риманово многообразие с несвязной, бесконечной группой голономий.

**Определение 11.1.** Симметрическое многообразие есть риманово многообразие  $M$ , снабженное набором изометрий  $i_x$ , для любой точки  $x \in M$ . При этом  $i_x$  сохраняет  $x$ , является инволюцией, а на  $T_x M$  действует как  $-1$ .

**Задача 11.5.** Докажите, что группа изометрий симметрического многообразия действует на нем транзитивно.

**Определение 11.2.** Кососимметричная 2-форма на векторном пространстве  $V$  называется **невыврожденной**, если она симплектична. Для  $i > 2$ ,  $i$ -форма  $\rho$  называется **невыврожденной**, если для каждого нигде не зануляющегося векторного поля  $X$ , контракция  $\rho$  с  $X^1$  невырождена на факторе  $V/\langle X \rangle$ .

**Задача 11.6.** Найдите все  $i$ ,  $n$ , для которых на  $n$ -мерном пространстве есть невырожденные  $i$ -формы.

**Задача 11.7.** Пусть на  $\mathbb{R}^7$  задана невырожденная кососимметричная 3-форма. Найдите размерность ее стабилизатора в  $GL(7)$ .

**Задача 11.8.** Пусть на векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы три 2-формы  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , причем любая ненулевая линейная комбинация  $\Omega_i$  невырождена. Докажите, что  $n$  делится на 4, а стабилизатор этих трех форм в  $GL(n)$  изоморфен  $Sp(n) = SU(\mathbb{H}, n)$ .

**Задача 11.9.** Пусть  $M$  – псевдориманово многообразие сигнатуры  $(p, q)$  (многообразие с невырожденной билинейной симметрической формой  $g$  сигнатуры  $(p, q)$ ). Докажите, что на  $M$  существует и единственная связность без кручения, сохраняющая  $g$  (такая связность называется **связность Леви-Чивита**).

**Задача 11.10.** Пусть  $M$  – псевдориманово многообразие сигнатуры  $(p, q)$ ,  $p \neq q$ , а голономия связности Леви-Чивита приводима. Докажите, что  $M$  локально разлагается в произведение псевдоримановых многообразий меньшей размерности.

<sup>1</sup>Контракцией формы  $\rho$  с векторным полем  $X$  называется форма  $\rho(X, \cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ .