

Комплексные многообразия 12: теорема Калаби-Яу

Задача 12.1. Пусть $\frac{(\omega + dd^c \phi)^n}{\omega^n} = Ae^f$ решение уравнения Монжа-Ампера, с ненулевой константой A . Докажите, что форма $\omega + dd^c \phi$ кэлерава.

Задача 12.2. Обозначим за $MA(\phi)$ функционал $MA(\phi) := \log \frac{(\omega + dd^c \phi)^n}{\omega^n}$. Докажите, что на компактном кэлеровом многообразии M любое решение уравнения $MA(\phi) = f + \phi$ ограничено константой, которая зависит от $f \in C^\infty M$ и геометрии M .

Определение 12.1. **Сильно положительная форма** есть вещественная (p, p) -форма, полученная как линейная комбинация произведений неотрицательно определенных эрмитовых форм с положительными коэффициентами, **слабо положительная форма** есть вещественная (p, p) -форма, удовлетворяющая $\eta(\zeta_1, I(\zeta_1), \dots, \zeta_k, I(\zeta_k)) \geq 0$ для любого набора из k векторов $\zeta_i \in TM$.

Задача 12.3. Докажите, что любая сильно положительная форма слабо положительна.

Определение 12.2. Пусть V – векторное пространство, а $K \subset V$ выпуклый конус, т.е. выпуклое подмножество, которое сохраняется гомотетиями с положительным коэффициентом, а $g : V \times V' \rightarrow \mathbb{R}$ – невырожденное спаривание. Конус $K' \subset V'$ называется **двойственным** к K , если

$$x \in K \Leftrightarrow \forall y \in K', \quad g(x, y) \geq 0$$

Задача 12.4. Пусть K – открытый конус. Всегда ли двойственный к нему конус открыт?

Задача 12.5. Пусть M – компактное комплексное многообразие. Рассмотрим спаривание $\Lambda^{p,p} M \times \Lambda^{n-p, n-p} M$, $\alpha, \beta \rightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$. Докажите, что конус слабо положительных форм двойственный к конусу сильно положительных.

Задача 12.6. Пусть $\dim_{\mathbb{C}} M = 3$. Докажите, что любая слабо положительная форма на M сильно положительна.

Задача 12.7. Найдите слабо положительную $(2,2)$ -форму на 4-мерном комплексном многообразии, которая не сильно положительна.

Задача 12.8. Пусть P – строго сильно положительная форма (то есть форма, лежащая во внутренности конуса сильно положительных форм) на компактном кэлеровом многообразии, а f – функция, такая, что $dd^c f \wedge P = 0$. Докажите, что f – константа.