

## Комплексные многообразия 13: спиноры

**Задача 13.1.** Докажите, что естественное отображение  $V \rightarrow \mathcal{C}(V)$  инъективно.

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $\mathbb{C}$  с невырожденным скалярным произведением, а  $S$  – спиноры на нем.

**Задача 13.2.** Докажите, что естественное клиффордово умножение на  $v \in V \subset \mathcal{C}(V)$  задает сюръективное отображение  $V \otimes S \rightarrow S$ .

**Задача 13.3.** Докажите, что клиффордово умножение на  $v \in V \subset \mathcal{C}(V)$  переводит  $\mathcal{C}^+(V)$  в  $\mathcal{C}^-(V)$  и наоборот.

**Задача 13.4.** Докажите, что  $\text{Spin}(3, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C})$ .

**Определение 13.1.** Определим  $\text{Spin}(n, \mathbb{R})$  как подгруппу накрытия  $\text{Spin}(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C})$ , которая остается на месте при антикомплексной инволюции, полученной поднятием из стандартной инволюции на  $SO(n, \mathbb{C})$ .

**Задача 13.5.** Докажите, что эта инволюция всегда поднимается до инволюции  $\text{Spin}(n, \mathbb{C})$ .

**Задача 13.6.** Докажите, что  $\text{Spin}(3, \mathbb{R}) \cong SU(2)$ .

**Задача 13.7.** Докажите, что  $\text{Spin}(n, \mathbb{R})$  – нетривиальное накрытие  $SO(n)$  для любого  $n \geq 3$ .