Комплексные многообразия 14: спиноры

Задача 14.1. Пусть $\psi \in S$ – спинор над V, а $S \otimes V \xrightarrow{\sigma} S$ – клиффордово умножение. Обозначим за $K(\psi)$ множество всех $v \in V$ таких, что $\sigma(\psi, v) = 0$. Докажите, что $\dim K(\psi) \leqslant \frac{1}{2} \dim V$ для ненулевых ψ.

Определение 14.1.
Чистый спинор есть спинор ψ, для которого выполнено $\dim K(\psi) = \frac{1}{2} \dim V$.

Задача 14.2. Докажите, что для $\dim_{\mathbb{C}} V = 2n \leqslant 6$, все спиноры чистые.

Задача 14.3. Найдите размерность пространства чистых спиноров.

Задача 14.4. Найдите центр $\operatorname{Spin}(n)$.

Задача 14.5. Докажите, что группа $\operatorname{Spin}(n)$ односвязна для $n \geqslant 3$.

Задача 14.6. Постройте изоморфизм $\operatorname{Spin}(5) \cong Sp(2)$.

Задача 14.7. Постройте изоморфизм $\operatorname{Spin}(6) \cong SU(4)$.

Задача 14.8. Докажите, что каждое многообразие допускает Spin^c-структуру.

Задача 14.9. Постройте Spin-структуру на $\mathbb{R}P^2$, или докажите, что ее не бывает.

Задача 14.10. Постройте Spin-структуру на $\mathbb{C}P^2$, или докажите, что ее не бывает.