Комплексные многообразия 15: спиноры и оператор Дирака

Задача 15.1. Докажите, что произведение спин-многообразий - снова спин-многообразие.

Задача 15.2. Пусть $s \in S$ – спинор, а $f \in C^\infty M$ – функция. Докажите, что $D(fs) = fD(s) + \sigma(\operatorname{grad} f, s)$, где D есть оператор Дирака, а σ – клиффордово умножение.

Задача 15.3. Пусть $s \in S$ – спинор, а $x \in TM$ – векторное поле. Докажите, что $D(\sigma(x, s)) = -\sigma(X, D(s)) - 2\nabla_x s - \sigma(\nabla(x), s)$, где последняя σ есть клиффордово умножение $\nabla(x) \in TM \otimes \Lambda^1 M = TM \otimes TM$ на спиноры.

Определение 15.1. Спинор s называется **киллинговым** с константой Киллинга c, если $\nabla_X s = c\sigma(X, s)$.

Задача 15.4. Пусть s – киллингов спинор, который зануляется в $m \in M$. Докажите, что $s = 0$.

Задача 15.5. Пусть s – ненулевой киллингов спинор на римановом многообразии M. Докажите, что

$$[\nabla_X \nabla_Y] s = \nabla_{[X,Y]} s + c^2 \sigma(XY, s).$$

Выведите из этого, что скалярная кривизна M постоянна.

Задача 15.6. Пусть многообразие M допускает ненулевой киллингов спинор с $c \neq 0$. Докажите, что группа голономий M максимальна, то есть содержит $SO(n)$.